



Las representaciones geométricas en un libro de texto interactivo de geometría para la educación primaria

The Geometric Representations in an Interactive
Geometry Textbook for Primary Education

Recibido: 1 de marzo de 2024. Aprobado: 26 de junio de 2024

<http://doi.org/10.15359/rep.19-1.6>

Carlos Alberto Monge Madriz¹

Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

camonge@itcr.ac.cr

Zuleyka Suárez Valdés-Ayala²

Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

zsuares@tec.ac.cr

Luis Gerardo Meza Cascante³

Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

gemeza@tec.ac.cr

Rebeca Solís Ortega⁴

Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

rsolis@tec.ac.cr

- 1 Docente, investigador y extensionista. Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España. <https://orcid.org/0000-0002-5148-2797>
- 2 Docente, investigadora y extensionista. Doctora en Educación de la Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica. <https://orcid.org/0000-0002-1822-4825>
- 3 Docente, investigador y extensionista. Doctor en Educación de la Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica. <https://orcid.org/0000-0002-5413-0172>
- 4 Docente, investigadora y extensionista. Máster en Ciencias de la Computación del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. <https://orcid.org/0000-0002-3065-8386>

RESUMEN



El proyecto “Eveprim 3.1: un recurso interactivo de Geometría para estudiantes de tercer año de primaria” se llevó a cabo en 2023, a cargo de Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, y tuvo como objetivo la creación de un libro digital que abarcara las habilidades y los contenidos para ese nivel, contemplados en el programa oficial de matemáticas costarricense. En la primera etapa de confección del libro, se llevó a cabo un análisis exhaustivo de textos de tres editoriales costarricenses; se evaluó específicamente si el número de representaciones figurativas de conceptos geométricos era adecuado, la existencia de distracciones en la estructuración y orientación, y la idoneidad de las imágenes de objetos reales. Al considerar las debilidades identificadas, se elaboró el recurso digital, el cual fue posteriormente validado a través del juicio de expertos. El resultado final es un libro interactivo de geometría que se caracteriza por la inclusión de figuras en posiciones no estandarizadas, en términos de su estructuración y orientación, y un alto porcentaje de imágenes reales, a fin de incrementar la capacidad de visualización y comprensión espacial del estudiantado. Además, se fomenta el aprendizaje con representaciones dinámicas al incorporar videos y aplicaciones interactivas de la web.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas, enseñanza primaria, geometría, recursos educativos abiertos, visualización.



ABSTRACT

The project “Eveprim 3.1: An Interactive Geometry Resource for Third-Grade Primary Students” was developed in 2023 by the School of Mathematics at the Costa Rica Institute of Technology (ITCR in Spanish); its objective was to create a digital book covering the skills and content for that level as outlined in the official Costa Rican Mathematics program. In the initial stage of book creation, a thorough analysis of texts from three Costa Rican publishers was conducted. This evaluation was focused on the adequacy of figurative representations of geometric concepts, distractions in structuring and orientation, and the suitability of images of real objects. Considering the identified weaknesses, the digital resource was developed and subsequently validated through expert judgment. The result is an interactive geometry book characterized by the inclusion of figures in non-standardized positions in terms of structure and orientation, and a high percentage of real images, enhancing students’ spatial visualization and comprehension skills. Furthermore, the project encourages learning through dynamic representations by incorporating videos and interactive web applications.

Keywords: geometry, mathematics education, open educational resources, visualization, primary education



Introducción

La comprensión de ciertos conceptos en geometría se ve influenciada por la capacidad de visualización. De acuerdo con **Barrantes, López y Fernández (2014)**, los libros de texto al representar figuras y conceptos geométricos pueden generar esquemas mentales inapropiados, lo cual obstaculiza la correcta asimilación de ideas y contenidos.

Barrantes y Zapata (2008) identifican varios elementos que pueden generar obstáculos y errores en la enseñanza y el aprendizaje de las figuras geométricas. Estos se relacionan con la simbología visual asociada a los conceptos, distracciones en la orientación, distractores relacionados con la estructuración y el uso de imágenes reales para visualizar conceptos. Se sugiere, entonces, que los educadores lleven a cabo una evaluación crítica de la representación visual de la geometría, antes de incorporar un libro de texto en sus clases. Lo anterior les permitirá orientar de manera efectiva a sus estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje (**Barrantes, López y Fernández, 2014**).

En el marco del proyecto “Recurso Interactivo de Geometría para Estudiantes de Tercer año de Primaria (Eveprim 3.1)”, se ideó, se elaboró y se validó un libro interactivo destinado al tercer año de la educación primaria en Costa Rica, tomando como referencia los autores previamente mencionados.

Así las cosas, este artículo inicia con una exposición de antecedentes que vinculan el estudio de la visualización y las representaciones geométricas en libros de texto, para luego detallar los referentes teóricos asociados con la representación de figuras en esta área. A continuación, se describe la metodología empleada en la construcción del libro, la cual incluyó un análisis de las ilustraciones presentes en textos ampliamente utilizados. Finalmente, se presenta el recurso desarrollado, el cual aborda de manera minuciosa las deficiencias identificadas en los materiales analizados. Este recurso culmina con la creación de un libro interactivo que concede especial importancia a las representaciones geométricas examinadas a lo largo del proceso de análisis.

Antecedentes

El estudio de la visualización en los capítulos dedicados a la geometría en los textos didácticos ha sido abordado en diversas investigaciones. Por ejemplo, **Muñoz y Ortega (2014)** estudiaron textos de las tres editoriales colombianas más utilizadas en educación preescolar, a partir de tres categorías: 1) representación figural (en el sentido de que una figura está compuesta de una variación visual que depende de la dimensión y de cualidades como la forma o el tamaño), 2) dimensionalidad (se define como el contexto en dos o tres dimensiones donde se trabaja con las figuras en una actividad) y 3) flujo visual (corresponde a la secuencia visual que se utiliza en el desarrollo de la actividad en un libro de texto).

Las representaciones figurales mayoritarias corresponden a figuras imagen (figuras de objetos reales que son colocadas en los libros, pero no con el objetivo de definir un concepto geométrico). El análisis del flujo visual se llevó a cabo en dos grupos, de acuerdo con la dimensionalidad de cada actividad propuesta en el libro de texto: aquellas que se desarrollaban en el



plano (dos dimensiones) y las que se realizaban fuera del plano (tres dimensiones). En actividades llevadas a cabo en un entorno bidimensional, el flujo visual predominante está relacionado con el desarrollo de habilidades motoras finas, como pintar, dibujar o escribir. Por su parte, en actividades que se desarrollan en un contexto tridimensional, se promueve el uso del doblado de papel para explorar simetrías y relaciones parte-todo. Este estudio resalta la relevancia de priorizar el aprendizaje geométrico desde edades tempranas, en ese sentido, subraya que las actividades presentadas en los libros de texto pueden estimular habilidades de visualización y que un enfoque adecuado podría facilitar la comprensión de conceptos geométricos.

Ahora bien, **Barrantes, López y Fernández (2015)** analizaron la cantidad de representaciones geométricas asociadas a los conceptos, presencia de distractores de estructuración (representaciones de un concepto geométrico en donde sin intencionalidad se excluyen propiedades o elementos) y distractores de orientación (definidos como propiedades visuales que están en la mente del estudiante y son atribuidos a figuras, pero no tienen relación con la definición conceptual), además, la representación plana de figuras tridimensionales y las imágenes reales asociadas a conceptos geométricos. Para lo anterior tomaron en cuenta libros de texto utilizados en la comunidad de Extremadura, España.

Los autores concluyen que los libros de texto adolecen de vacíos, al utilizar muy pocas representaciones para introducir conceptos geométricos. Todos los triángulos rectángulos y la mayoría de los trapecios presentan distractores por su orientación. En cuanto a distractores de estructuración, tienden a presentar la altura del triángulo como única y vertical, además, casi todos los cuerpos geométricos son presentados con una base de menor longitud que la altura del sólido. No hay una editorial que pueda considerarse como apta en cuanto a las representaciones geométricas, todas presentan

ventajas y desventajas. Debido a que estas deficiencias en los libros de texto pueden generar dificultades en el aprendizaje de los conceptos geométricos, los investigadores enfatizan en que el docente debe ser muy crítico al seleccionar estos materiales y tener la capacidad de complementarlos con actividades muy bien diseñadas.

Por su parte, *Serrano et al. (2018)* estudiaron las componentes del sentido espacial en un libro de texto español, dentro de las cuales se destaca la visualización en un capítulo relacionado con traslaciones. El sentido espacial se define como la interacción entre conceptos geométricos (propiedades de las formas y figuras, relaciones geométricas y ubicaciones o movimientos) con habilidades para visualizarlos (percepción figura contexto, conservación de la percepción, percepción de las relaciones espaciales, entre otras).

Los resultados indican que las actividades propuestas estimulan muy poco el desarrollo de la visualización, de manera que obstaculizan su conexión con la comprensión de los conceptos geométricos. Además, el componente geométrico que más resalta es el manejo de movimientos; mientras que la habilidad de visualización que más se pone en juego es la percepción de la posición en el espacio. Las imágenes que más destacan son las formales (aquellas representaciones en el plano euclídeo o cartesiano que se presentan solo con símbolos matemáticos) versus las imágenes pictóricas (imágenes de objetos físicos en contexto real).

Marco teórico

Consideraciones teóricas relacionadas con la visualización

Falconí-Procel (2021) indica que la imaginación, la intuición y la visualización son herramientas que benefician el entendimiento y aprendizaje



de la geometría. Por esta razón, en este apartado se ahondan aspectos que permiten enmarcar teóricamente estas nociones.

Vinner (1991) argumenta que entender un concepto geométrico implica fusionar su representación visual (imagen conceptual) con su definición conceptual, donde las imágenes son más influyentes que la definición misma. Por su parte, Tall y Vinner (1981) definen la imagen conceptual como todas aquellas estructuras cognitivas que involucran el manejo de imágenes mentales y procesos asociados.

En concordancia con Segade (2022), las imágenes mentales pueden definirse como “cualquier representación visual del concepto e incluso símbolos. Por añadidura, se debe tener presente que las propiedades que caracterizan las imágenes mentales son consideradas parte de la imagen conceptual” (p. 49). Además, estas se crean en la mente del ser humano sin la necesidad de tener la imagen física presente, son subjetivas y pueden variar de una persona a otra (Camargo, 2011). En el proceso de aprendizaje de un concepto geométrico se emplean representaciones externas, las cuales son formas gráficas o verbales que comprenden dibujos, figuras, imágenes o formas geométricas. Dichas representaciones facilitan la creación o modificación de imágenes mentales y posibilitan el razonamiento visual (Gutiérrez, 1996).

Ahora bien, Arnal-Bailera y Lancis (2016) indican que una imagen conceptual es completa y correcta “cuando ese conjunto de ejemplos y propiedades es tan amplio que le permiten al estudiante construir e identificar ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades asociadas son correctas” (p. 106). Por eso, resulta fundamental proporcionar una amplia variedad de imágenes al introducir contenido matemático relacionado con conceptos geométricos, a fin de generar una imagen conceptual detallada y profunda (Barrantes *et al.*, 2015). La imagen conceptual no solo está relacionada al momento de comprender un concepto geométrico, también se refleja cuando

se construye una definición, al tener claro las propiedades necesarias y suficientes atribuibles al objeto matemático por definir (Montes *et al.*, 2022), de ahí la importancia de contar con un amplio repertorio de representaciones.

Al considerar lo tratado en párrafos anteriores, la falta de diversidad en las representaciones puede resultar en una comprensión errónea de los conceptos geométricos, lo cual a su vez puede conducir a errores y dificultades en etapas posteriores del aprendizaje (Barrantes *et al.*, 2015). Algunos materiales educativos muestran las diversas figuras a través de una única ilustración o un reducido número de ellas, lo cual genera dificultades e induce al error, pues generan imágenes mentales inapropiadas que repercuten en dificultades en el aprendizaje geométrico, al elaborar imágenes conceptuales incompletas o poco profundas (Barrantes *et al.*, 2015; Palacio *et al.*, 2022).

Aspectos que se deben considerar en los libros de texto para una adecuada generación de imágenes conceptuales

Barrantes *et al.* (2015) sugieren la necesidad de analizar en un libro de texto la cantidad de imágenes asociadas a un concepto, los distractores de estructuración, los distractores de orientación y las imágenes reales.

Cantidad adecuada de imágenes para visualizar un concepto

Los conceptos geométricos no deben confundirse con sus representaciones externas. Según Moriena y Scaglia (2003), el estudiantado encuentra dificultades al reconocer figuras geométricas cuando estas difieren de las representaciones convencionales que aparecen en los libros de texto. Los investigadores concluyen que es crucial que las personas estudiantes apliquen sus conocimientos conceptuales sobre figuras geométricas, incluso cuando se presentan en dibujos no estereotipados.



Distractores de orientación

Los distractores de orientación son características visuales que se incorporan en la comprensión conceptual del estudiante, pero que no guardan relación alguna con la definición del concepto tratado (Barrantes, López y Fernández, 2014). Por ejemplo, comúnmente los triángulos o los ángulos tienden a representarse apoyados sobre un lado de forma horizontal (Palacio *et al.*, 2022).

Distractores de estructuración

Los distractores de estructuración se relacionan con una representación incompleta del concepto, donde ciertos elementos y propiedades son omitidos, de manera que se dificulta la comprensión y aplicación de las estructuras geométricas (Barrantes, López y Fernández, 2014). Por ejemplo, cuando se presenta el triángulo isósceles con el lado desigual como base (Mellero, 2021).

La presencia de estos distractores, tanto de estructuración como de orientación, tienen importantes implicaciones en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Según Palacio *et al.* (2022), ocurre con frecuencia que las personas estudiantes de primaria no identifican un cuadrado apoyado sobre el vértice como tal, pues el cuadrado siempre se representa sobre uno de sus lados.

Imágenes reales asociadas a conceptos

Autores como Barrantes, López y Fernández (2014) y Barrantes *et al.* (2015) mencionan que la geometría y la vida deben relacionarse en forma adecuada a través de imágenes reales; no obstante, en algunos libros de texto estas se presentan en forma no pertinente. En caso de que la imagen

presentada no sea adecuada, la persona docente debe analizar con los estudiantes su pertinencia en relación con el concepto geométrico, a fin de evitar confusiones. Seguidamente, proponer e impulsar imágenes, fotografías y videos sobre elementos geométricos en la realidad, teniendo especial cuidado en la conveniencia de estos como suplentes de los elementos geométricos abstractos.

Uso de tecnología y vídeos para apoyar los procesos visualizadores

Se coincide con [Grisales \(2018\)](#) respecto a que la integración de herramientas tecnológicas proporciona beneficios significativos al facilitar la visualización, la exploración y la comprensión de estructuras y relaciones geométricas. Son fuentes poderosas para mejorar las imágenes mentales del estudiantado asociadas a conceptos geométricos. Herramientas como GeoGebra, por ejemplo, permiten a la persona estudiante explorar y manipular figuras geométricas de manera dinámica. Además, la incorporación de videos como parte de los materiales de aprendizaje en línea ayuda a visualizar procesos geométricos complejos y a entender mejor los conceptos abstractos.

Según [Barrantes, López y Fernández \(2014\)](#) los “libros digitales” permiten resolver y mejorar todas las deficiencias que encontramos en los libros físicos actuales en cuanto a la visualización de la Geometría se refiere. Para ello, es necesario que esos nuevos libros digitales sean interactivos y dinámicos.



Metodología

Primera fase: Análisis de libros utilizados en escuelas costarricenses

Como primera fase en el desarrollo del proyecto, se analizaron textos de matemáticas publicados en tres editoriales de amplio uso en las aulas de Costa Rica para tercer año en el área de geometría, a saber: Santillana, Porras y Gamboa y Grupo Edebé. El análisis se realizó de acuerdo con las cuatro categorías seguidas por [Barrantes y Zapata \(2008\)](#) y [Barrantes et al. \(2015\)](#): cantidad de representaciones asociadas a un concepto, los distractores de orientación, los distractores de estructuración y las imágenes reales de conceptos. A continuación, se describen los criterios asociados a cada una de ellas.

Categoría 1: Cantidad de representaciones asociadas a un concepto

En cada libro se estudió la cantidad de representaciones geométricas asociadas a un concepto geométrico cuando este se introduce. Siguiendo a [Barrantes et al. \(2015\)](#), se procedió operativamente de la siguiente manera: “aunque se puedan representar varios dibujos, si estos son esencialmente iguales, sólo contabilizamos uno. Consideramos que dos representaciones son iguales si presentan características similares” (p. 112).

Categoría 2: Distractores de orientación

En cada uno de los textos se analizó si las figuras se presentan en forma estereotipada o no, en concordancia con su orientación. Al considerar lo tratado en el marco teórico, dichas figuras presentan características visuales que el estudiantado incorpora a sus imágenes mentales y que no guardan relación con la definición geométrica. Por tanto, se tomaron en cuenta figuras

en posición estándar o estereotipada, las cuales se indican en el siguiente listado.

1. Ángulos apoyados sobre un lado horizontal.
2. Rectas o segmentos colocados de forma paralela o perpendicular a los bordes de la hoja del libro.
3. Líneas paralelas y perpendiculares que son horizontales y verticales.
4. Polígonos apoyados sobre un lado horizontal.
5. Sólidos apoyados sobre una base plana.

Categoría 3: Distractores de estructuración

Se incluyeron específicamente aquellas figuras que, debido a la abundancia de representaciones estereotipadas, tienen el potencial de inducir a las personas estudiantes a asignar incorrectamente propiedades geométricas. En este sentido, se identificaron los siguientes distractores de estructuración.

1. Figuras planas convexas.
2. Cajas con una altura mayor que el ancho de la base.

Categoría 4: Imágenes reales asociadas a un concepto

En esta categoría se evaluaron exhaustivamente todas las fotografías o dibujos que procuraban representar conceptos geométricos, a fin de analizar su idoneidad para la enseñanza y discutir su pertinencia en el contexto educativo.

Segunda fase: Construcción de la primera versión del libro

Los resultados de la etapa anterior permitieron develar carencias en cuanto a las representaciones geométricas en libros de texto comúnmente usados en aulas costarricenses. Al considerar tales debilidades y los planteamientos teóricos sobre las representaciones geométricas, indicados en



Barrantes y Zapata (2008) y Barrantes *et al.* (2015), se construyó la primera versión del libro interactivo de geometría. Esta primera versión se configuró de acuerdo con las secciones que se han utilizado en libros previos del proyecto Educación Virtual para Estudiantes de Primaria (Eveprim), las cuales se pueden observar en la Tabla 1.

Tabla 1
Secciones que se incorporaron en el libro interactivo

Sección	Descripción
Recuerda que	Se presentan pequeñas casillas en donde se recuerdan aspectos puntuales que son necesarios para resolver un ejercicio o problema.
Para saber más	Se proponen aspectos teóricos, ejercicios o problemas que corresponden a un año educativo posterior o avanzado para aquellos estudiantes que deseen ampliar sus conocimientos.
Sabías que	Se presentan aspectos en donde se vinculan los conocimientos matemáticos con la historia, curiosidades del mundo o aplicaciones de la vida diaria.
Videos	Se proponen materiales audiovisuales de autoría propia en donde se introducen contenidos, se refuerzan aspectos teóricos o se brindan soluciones de ejercicios.
Prácticas	Lista de ejercicios y problemas con la finalidad de evaluar lo aprendido. Contienen soluciones detalladas paso a paso.
Aplicaciones tecnológicas	Materiales interactivos que se pueden utilizar con aplicaciones en GeoGebra, Mathigon, Genially, entre otros.

Nota: Elaboración propia.

Tercera fase: Validación de la primera versión del libro

Lograda la primera versión del libro, se desarrolló un proceso de validación en dos etapas secuenciales. La primera, totalmente a cargo de las personas autoras y desarrollada bajo la figura de juicio de expertos, consistió en someter la versión inicial del texto a un análisis similar al ejecutado en la primera fase, a fin de detectar si existían muchas figuras estereotipadas asociadas a elementos geométricos. Así, a partir de los resultados, introducir las mejoras respectivas que se valoraran pertinentes.

En la segunda fase se realizó un proceso de validación mediante juicio de expertos, con la participación de nueve docentes de educación primaria en ejercicio y dos asesores nacionales de matemáticas del Ministerio de Educación Pública (MEP), quienes realizaron una revisión completa del material por medio de un formulario en línea. A partir de las observaciones y recomendaciones recibidas, se introdujeron modificaciones en el libro para obtener la versión definitiva.

Resultados

Resultado del análisis de libros de tres editoriales utilizados en escuelas costarricenses

Categoría 1: Cantidad de representaciones asociadas a un concepto

Se examinaron aspectos como la definición de ángulos y sus clasificaciones, rectas, segmentos y sus relaciones de paralelismo y perpendicularidad, polígonos y sus clasificaciones, así como la circunferencia y sus elementos, la esfera y sus componentes, y las cajas y sus elementos. Los hallazgos indican



que los libros de texto analizados ofrecen una cantidad limitada de representaciones al introducir figuras y conceptos geométricos.

En términos generales, se observó que la Editorial Santillana utiliza, en promedio, 1 representación geométrica por cada definición; mientras que Porras y Gamboa emplea 1.4 y Edebé 2.4. Aunque el promedio de representaciones en el libro de Edebé es más alto, se debe mencionar que sus textos no incorporan todos los conceptos geométricos que estipula el programa de matemática vigente para el tercer año.

Aunado a lo anterior, se identificó que algunos conceptos geométricos se presentan con solo una representación visual; mientras que en otros se percibe una ausencia total de figuras que respalden la explicación teórica. Se encontraron ejemplos de definiciones, como en el caso de pentágono y hexágono, para las cuales ninguno de los libros analizados proporciona una representación gráfica asociada a ellas. Dicho hallazgo es relevante (y preocupante), porque, de acuerdo con [Barrantes, Fernández y López \(2014\)](#), la escasez de representaciones visuales al definir un concepto geométrico puede conducir a una comprensión errónea de este, lo que a su vez podría resultar en la aparición de errores y obstáculos en etapas posteriores del aprendizaje.

Categoría 2: distractores de orientación

En los tres libros analizados se encontró que todos los conceptos geométricos estudiados (ángulos, rectas, segmentos, líneas paralelas y perpendiculares, polígonos y cajas) presentan una mayor cantidad de figuras estereotipadas en comparación con las no estereotipadas, en ese sentido, el concepto de ángulo se presenta mayoritariamente de forma estereotipada. Así pues, la Editorial Santillana presenta un total de 48 figuras estereotipadas frente a 28 no estereotipadas; la Editorial Porras y Gamboa, 64 figuras

estereotipadas y 23 no estereotipadas; y Edebé, 30 figuras estereotipadas frente a 5 no estereotipadas.

Este hallazgo también es de suma importancia porque el abundante uso de figuras estereotipadas en su orientación le complica al estudiantado realizar tareas geométricas que involucren representaciones no estereotipadas (Dickson *et al.*, 1991).

Categoría 3: Distractores de estructuración

Al igual que la categoría anterior, el hallazgo general es que en los textos analizados se presentan figuras que pueden generar problemas de estructuración. La Editorial Santillana, por ejemplo, presenta 41 polígonos, de los cuales 32 son convexos y 9 cóncavos. Esto podría generarle dificultades al estudiantado para comprender el concepto de polígono, el cual en su mayoría se representa en el libro como convexo. De forma similar, en el texto de la Editorial Porras y Gamboa, se presentan 18 polígonos convexos y 4 que no lo son; por su parte, la Editorial Edebé no presenta ningún concepto asociado al de polígono.

Respecto a la representación de cajas que no sean cubos, con una altura mayor que el ancho de la base, ni la Editorial Santillana ni Edebé presentan este concepto; mientras que la Editorial Porras y Gamboa presenta 5 representaciones estereotipadas y 2 no estereotipadas.

Categoría 4: Imágenes reales asociadas a un concepto

En esta categoría se tomaron en cuenta los conceptos de ángulo, líneas paralelas y perpendiculares (que incluye segmentos y rectas), polígonos, circunferencias, esferas y, por último, cajas (que considera cualquier paralelepípedo y el caso particular de los cubos). Sobre la cantidad de imágenes reales asociadas a un concepto, dos editoriales prácticamente duplican



el número de figuras inadecuadas con respecto a las adecuadas: Santillana presenta en su libro 30 imágenes adecuadas y 89 inadecuadas; mientras que Porras y Gamboa presenta 17 imágenes adecuadas y 30 inadecuadas. Por su parte, la Editorial Edebé presenta todas sus representaciones adecuadas, pero en una cantidad más limitada, solo 14.

El libro digital en su versión final

El producto final obtenido es un libro interactivo en formato PDF, de 264 páginas, el cual contiene distintos recursos educativos abiertos. El texto abarca las seis secciones presentes en la primera versión, cuyas descripciones se detallan en la Tabla 1. Además, cubre todas las habilidades relacionadas con geometría, propuestas por el MEP en los programas de matemáticas de tercer año, incluso integra los cinco ejes disciplinares: contextualización activa, historia de la matemática, fomento de actitudes y creencias positivas, resolución de problemas y uso de la tecnología.

El recurso se desarrolló a partir del uso de un lenguaje sencillo y se ha enriquecido con imágenes libres o de autoría propia. Asimismo, se diseñó manteniendo una coherencia gráfica en cuanto a colores y estilos. El público objetivo de este recurso son docentes, estudiantes y encargados de familia.

Representaciones geométricas en la versión final del libro

El recurso interactivo desarrollado, fundamentado en el análisis de libros de tres editoriales utilizados en escuelas costarricenses, logró abordar de manera integral todas las deficiencias identificadas. El objetivo principal consistió en equilibrar las representaciones, a fin de asegurar que las figuras con estereotipos no fueran las predominantes.

Siguiendo las categorías mencionadas anteriormente, se llevó a cabo un análisis exhaustivo de la primera versión del libro, con el propósito de detectar áreas susceptibles de mejora. Se identificó una carencia de representaciones vinculadas a los conceptos de pentágono y hexágono. En cuanto a los distractores de orientación, se implementaron mejoras específicas relacionadas con la posición de los polígonos y las cajas. Respecto a los distractores de estructuración, se observó una prevalencia de polígonos convexos; dicha situación fue corroborada con el aumento de la presencia de figuras cóncavas. Este proceso de refinamiento y ajuste garantizó una presentación más equitativa y enriquecedora de los conceptos geométricos en el recurso interactivo.

A continuación, se presentan los resultados finales correspondientes a la última versión del libro elaborado en el proyecto. Se destacan los ajustes realizados en relación con las categorías analizadas.

Categoría 1: Número de representaciones asociadas a un concepto

La cantidad de representaciones asociadas a un concepto se fortaleció al presentar una variedad de figuras. En promedio, se incluyen en el libro 4.2 representaciones por cada concepto; una cifra alta, en comparación con los textos analizados, cuyo promedio es 1.1 representaciones por concepto. Por ejemplo, en el libro creado, luego de definir una caja (paralelepípedo), se presentan siete figuras asociadas a este concepto (Figura 1).

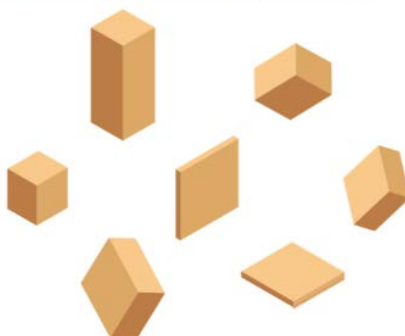


Figura 1
Cantidad de figuras asociadas al concepto de caja

Definición 6.5 Caja

Una caja es un cuerpo sólido formado por seis caras. Sus caras no necesariamente son cuadradas.

A continuación, se muestran cajas que tienen diferentes tamaños.

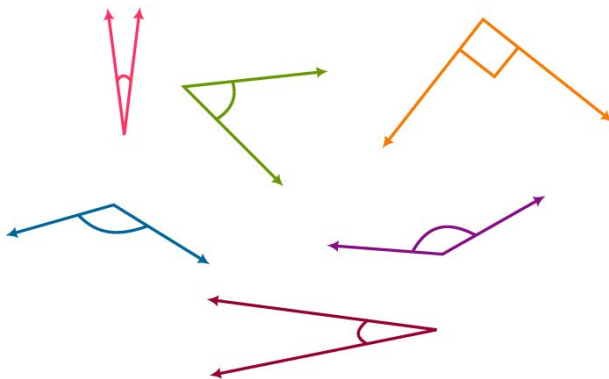


Nota: Tomado de Suárez *et al.* (2024, p. 180).

Categoría 2: Distractores de orientación

En cuanto a los distractores de orientación, para todos los conceptos, prevalecen las figuras no estereotipadas. En total, se presentan 135 representaciones no estereotipadas y 72 que sí lo son. Por ejemplo, en la Figura 2, correspondiente a uno de los ejercicios prácticos, se observan seis ángulos dispuestos en una posición no estándar. Asimismo, en la Figura 1, se representan tres cajas en una disposición no estandarizada.

Figura 2
Ejercicio presente en la práctica sobre ángulos
 **1.7.1** Estime (sin usar transportador), cuáles de los siguientes ángulos son agudos y enciérrelos dentro de un círculo.



Nota: Tomado de Suárez *et al.* (2024, p. 45).

Categoría 3: Distractores de estructuración

En cuanto a los distractores de estructuración, prevalecen aquellos que no son estereotipados. En total, 28 presentan algún tipo de estereotipación y 37 no. Es decir, existe un adecuado balance de las representaciones geométricas en cuanto a no generar distractores de estructuración. En la Figura 3 se evidencia que, al introducir el concepto de pentágono, se incluyen tres representaciones; de estas, dos son convexas, por lo tanto no generan distractores en cuanto a su estructuración.



Figura 3

Representaciones geométricas asociadas al concepto de pentágono

En general, cuando se tiene un polígono compuesto por cinco lados y cinco vértices, estos se denominan **pentágonos**. Hay muchos tipos de pentágonos, a continuación se presentan algunos ejemplos de estos.



Nota: Tomado de Suárez *et al.* (2024, p. 125).

Categoría 4: Imágenes reales de figuras y conceptos geométricos

Los conceptos expuestos en el libro se ilustran con numerosas imágenes reales, las cuales están estrechamente vinculadas de manera apropiada a los conceptos geométricos. En total, se incluyeron 106 imágenes reales que se relacionan de manera muy efectiva con el concepto geométrico que ilustran, y solo 16 que no lo hacen. Por ejemplo, en la Figura 4 se presenta una situación que involucra dos señales de tránsito, cuya forma se asocia a una representación geométrica que se considera adecuada.

Figura 4

Situación introductoria en donde se presentan imágenes reales asociadas a conceptos geométricos

Análisis

En su clase de Estudios Sociales, Jorge está estudiando las señales de tránsito. Por la forma que tienen, hay algunas que le llaman su atención. Dos de ellas se muestran a continuación.



Jorge sabe que las figuras de las señales son polígonos y quiere saber sus nombres. Ayude a Jorge y para cada señal, remarque el polígono que se forma e indique la cantidad de lados y vértices que tiene.

Nota: Tomado de Suárez *et al.* (2024, p. 122).

Es crucial señalar que las imágenes menos adecuadas se seleccionaron debido a que el objeto en sí mismo presenta características que lo distancian ligeramente de la definición geométrica. Sin embargo, se utilizaron con el fin de enriquecer la definición mediante una representación geométrica lo más precisa posible. Por ejemplo, se emplea la forma de una naranja para ilustrar una esfera. Aunque la naranja no es perfectamente esférica y su superficie no es completamente lisa, se considera una aproximación cercana al concepto geométrico.



Aplicaciones tecnológicas y videos para favorecer el proceso de visualización

Al considerar esencial que los libros digitales más recientes sean interactivos y dinámicos, pues le brindan a los alumnos y profesores entornos geométricos digitales apropiados (Barrantes, López y Fernández, 2014), se incluyeron en el libro enlaces a 10 videos, de un total de 25, todos de autoría propia, los cuales fueron diseñados según los distractores de orientación y estructuración, a fin de promover una visualización más dinámica de los elementos geométricos. En la Figura 5 se muestra una captura de pantalla de uno de los videos, titulado “Reconocer ángulos en dibujos”, en el cual se identifican ángulos en posición no estándar en distintos elementos del entorno.

Figura 5

Captura de vídeo “Reconocer ángulos en dibujos” que forma parte de los materiales audiovisuales incluidos en el libro



Nota: Elaboración propia.

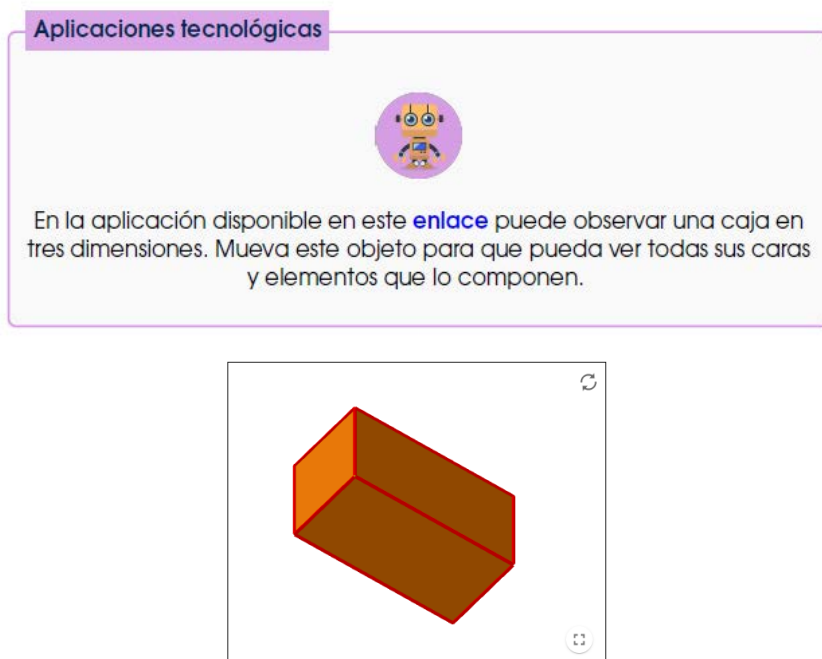
A partir de las sugerencias indicadas por **Barrantes, López y Fernández (2014)**, en torno a que “es preciso realizar actividades manipulativas con diversos materiales manipulativos y con software dinámico, orientando su uso de forma que se expongan situaciones con posiciones y propiedades no estándar con las que se pueda familiarizar el alumnado” (p. 114), se incorporaron cinco aplicaciones tecnológicas, de un total de 21, las cuales favorecen el manejo de las figuras geométricas en diversas posiciones no tradicionales.

Por ejemplo, mediante el uso del programa GeoGebra, se presentan *applets* que muestran diferentes vistas de una caja o de ángulos, incluso, cuestionarios interactivos en IXL que presentan figuras con orientaciones no estandarizadas. En la parte superior de la Figura 6 se muestra la forma en que se presentan las aplicaciones tecnológicas en el libro elaborado y, en la parte inferior, una captura de pantalla de una caja en un *applet* de GeoGebra, el cual permite rotarla y posicionarla de distintas maneras.



Figura 6

*Forma en que se presentan las aplicaciones tecnológicas en el libro
confeccionado*



Nota: Tomado de Suárez *et al.* (2024, p. 182).

Conclusiones y recomendaciones

La comprensión de conceptos geométricos se ve afectada por la capacidad de visualización, en ese sentido, los libros de texto pueden generar esquemas mentales inapropiados, de manera que se dificulta

la asimilación correcta de ideas y contenidos. El análisis de libros de tres editoriales utilizados en escuelas costarricenses, en tercer grado, reveló limitaciones en la cantidad y variedad de representaciones, así como en la presencia de figuras estereotipadas, distractores de orientación y estructuración, y un escaso uso de imágenes reales. Por lo tanto, se recomienda a los docentes que sean conscientes de estos aspectos al momento de elegir un libro de texto, con la finalidad de que puedan solventar las debilidades mediante otras estrategias.

Se elaboró y se validó un libro interactivo, creado como parte del proyecto Eveprim 3.1, el cual supera las deficiencias encontradas en los textos previamente analizados. Así pues, se proporciona una variedad de representaciones al introducir un concepto geométrico y se trató de evitar la presencia de distractores de orientación y de estructuración, mediante la incorporación de muchas representaciones geométricas no estereotipadas. Además, se incluyeron numerosas imágenes reales, consideradas adecuadas, en busca de una estrecha conexión con los conceptos geométricos. Se sugiere a los docentes que, cuando elaboren materiales escritos asociados a la geometría, consideren los aspectos anteriormente descritos que fueron tomados en cuenta para la elaboración del libro interactivo.

La integración de aplicaciones tecnológicas y videos favorece la visualización y la comprensión de conceptos geométricos, en ese sentido, los libros digitales interactivos y dinámicos son una opción más favorable para la comprensión de conceptos (Barrantes *et al.*, 2015). Por lo anterior, el libro generado involucra una serie de videos y aplicaciones interactivas de la web, los cuales buscan favorecer la visualización de las figuras geométricas de una forma más dinámica.

Se recomienda utilizar herramientas digitales, como software de geometría dinámica o aplicaciones interactivas, ya que permiten visualizar



de manera más clara y efectiva las propiedades y relaciones geométricas, lo cual contribuye a un aprendizaje más significativo por parte de los estudiantes. Además, la tecnología proporciona la oportunidad de explorar y experimentar con distintos casos y situaciones, de manera que se fomenta el pensamiento crítico y la resolución de problemas en el ámbito geométrico.

En resumen, el proyecto Eveprim 3.1 atendió de manera efectiva las limitaciones encontradas en los libros de texto analizados. En ese sentido, se generó un recurso interactivo que promueve una comprensión más profunda y precisa de los conceptos geométricos y que, además, abarca la totalidad de habilidades específicas y conocimientos en esta área, establecidas en el programa de matemática oficial para el estudiantado de tercer año de primaria en Costa Rica.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) por la aprobación del proyecto Eveprim 3.1 (código CF1701-1440-0004), cuyos resultados se exponen en este artículo. Asimismo, nuestro agradecimiento a las personas docentes participantes en los procesos de validación y a las personas estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos del ITCR por su valiosa ayuda en condición de asistentes.

Referencias

- Arnal-Brailera, A. y Lancis, Á. (2016). Análisis de progresos y dificultades en tareas de identificación del rombo en Educación Primaria con GeoGebra. *Números*, 92, 105-116. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/analisis-de-progresos-y-dificultades-en-tareas-de-identificacion-del-rombo-en-educacion-primaria-con-geogebra/>
- Barrantes, M., Fernández, I. y López, M. (2014). La componente visual de la geometría en los libros de textos de secundaria. *Premisa*, 62, 24-35. <http://funes.uniandes.edu.co/22955/>
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. (2014). Las representaciones geométricas en los libros de textos utilizados en la Comunidad Autónoma de Extremadura. *Campo Abierto*, 33(1), 97-116. <https://revista-campoabierto.unex.es/index.php/campoabierto/article/view/1553>
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6105>
- Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71. <https://revista-campoabierto.unex.es/index.php/campoabierto/article/view/1985>
- Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación*, 60, 41-60. <https://doi.org/10.17227/01203916.840>
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Editorial Labor.
- Falconí-Procel, X. Y. (2021). Modelo de Van Hiele y su utilización para la enseñanza de la geometría. *Polo del Conocimiento*, 56(6), 2261-2278. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7926874>
- Grisales, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2), 198-214. <https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751>
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.* <https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>



- Melero, D. (2021). *Enseñanza realista de la geometría en secundaria desde el medio urbano* [Tesis de maestría, Universidad a Distancia de Madrid]. Repositorio Institucional de la Universidad a Distancia de Madrid. <https://acortar.link/GBSmy3>
- Montes, M., Climent, N. y Contreras, L. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestro. *Revista Aula Abierta*, 51(1), 27-36. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36>
- Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). *Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza*. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19. <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol15/vol15-1/vol15-1-1.pdf>
- Muñoz, P. y Ortega, R. (2014). *Visualización en la enseñanza de la geometría en los libros de textos de pre-escolar* [Tesis de licenciatura, Universidad de Nariño]. Sistema Institucional de Recursos Digitales. <https://sired.udenar.edu.co/1846/1/90065.pdf>
- Palacio, N., Polo, I. y Fernández, L. (2022). Uso del geoplano para el aprendizaje de conceptos geométricos planos: un estudio de caso con un estudiante con necesidades educativas especiales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18(65), 1-20. <https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/816>
- Segade, M. (2022). *El desarrollo de la imagen conceptual del triángulo en el alumnado de Educación Primaria utilizando GeoGebra* [Tesis de doctorado, Universidad de Coruña]. Repositorio Institucional de la Universidad de Coruña. https://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/31191/SegadePampin_MariaEle-na_TD_2022.pdf?sequence=2&isAllowed=y
- Suárez, Z., Monge, C., Solís, R. y Meza, L. (2024). *Geometría 3º: Educación Virtual para Estudiantes de Primaria. Proyecto EVEPRIM 3*. <https://www.tec.ac.cr/geometr%C3%ADa-3>
- Serrano, Á., Ramírez, R. y Flores, P. (2018). El sentido espacial sobre traslaciones en un libro de texto. *Números*, 98, 117-131. <http://hdl.handle.net/10481/64607>
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5