Uniciencia Vol. 36(1), pp. 1-25, January-December, 2022
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

Conocimiento de profesores de matemáticas en formación inicial sobre la demostración: Aspectos lógico-matemáticos en la evaluación de argumentos

Knowledge of mathematics teachers in initial training regarding mathematical proofs: Logic-mathematical aspects in the evaluation of arguments

Conhecimento de professores de matemática em formação inicial sobre a demonstração: Aspectos lógico-matemático na avaliação de argumentos

Christian Alfaro-Carvajal[1], **Pablo Flores-Martínez**[2], **Gabriela Valverde-Soto**[3]

Received: Feb/5/2021 • Accepted: Set/16/2021 • Published: Jan/31/2022

Resumen

El objetivo de este estudio es caracterizar el conocimiento de profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre aspectos lógico-sintácticos y matemáticos de la demostración, al evaluar argumentos matemáticos. La investigación se posiciona en el paradigma interpretativo y tiene un enfoque cualitativo. Consta de dos fases empíricas: en la primera, se aplicó un cuestionario sobre los aspectos lógico-sintácticos a 25 sujetos, durante los meses de setiembre y octubre de 2018 y, en la segunda, un cuestionario sobre los aspectos matemáticos a 19 sujetos, durante los meses de mayo y junio de 2019. Para el análisis de la información, se propusieron indicadores de conocimientos, entendidos como frases para determinar evidencias de conocimientos en las respuestas de los sujetos. Se apreció que la gran mayoría de los futuros profesores de matemáticas evidencian conocimiento para discriminar cuándo un argumento matemático corresponde o no a una demostración en virtud de los aspectos lógicos y sintácticos, y de elementos matemáticos asociados a proposiciones con la estructura de la implicación universal. En general, brindaron mayores evidencias de conocimiento sobre los aspectos lógico-sintácticos que sobre los aspectos matemáticos. Concretamente, evidenciaron que un caso particular o la prueba de la proposición recíproca no demuestra el resultado; asimismo, evidenciaron conocimiento sobre la demostración directa e indirecta de la implicación universal. En el caso de los aspectos matemáticos considerados como las hipótesis, los axiomas, las definiciones y los teoremas, se apreció que podrían tener diferentes niveles de dificultades para comprender una demostración.

Palabras clave: Conocimiento del profesor de matemáticas; demostración matemática; formación inicial de profesores de matemáticas.

Christian Alfaro-Carvajal, cristian.alfaro.carvajal@una.ac.cr, http://orcid.org/0000-0003-2377-7181
Pablo Flores-Martínez, pflores@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-3292-6639
Gabriela Valverde-Soto, gabriela.valverde@ucr.ac.cr, https://orcid.org/0000-0002-1319-9499
1 Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.
2 Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.
3 Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

The objective of this study is to characterize the knowledge of mathematics teachers in initial training (MTITs) at the Universidad Nacional (Costa Rica) on the logic-syntactic and mathematical aspects involved in proving, when evaluating mathematical arguments. The research is positioned in the interpretive paradigm and has a qualitative approach. It consists of two empirical phases: in the first, a questionnaire regarding logic-syntactic aspects was applied to 25 subjects, during the months of September and October 2018 and; in the second phase, a second questionnaire covering mathematical aspects was applied to 19 subjects, during the months of May and June 2019. For the analysis of the information, knowledge indicators were proposed. Knowledge indicators are understood as phrases to determine evidence of knowledge in the responses of the subjects. It was appreciated that the vast majority of future mathematics teachers show knowledge to discriminate when a mathematical argument corresponds or not to a proof by virtue of the logic and syntactic aspects, and of mathematical elements associated with propositions with the structure of universal implication. In general, subjects displayed greater evidence of knowledge on the logic-syntactic aspects than on the mathematical aspects. Specifically, they evidenced that consideration of a particular case or the proof of the reciprocal proposition does not prove the result; likewise, subjects evidenced knowledge about the direct and indirect proof of the universal implication. In the case of the mathematical aspects considered as hypotheses, axioms, definitions and theorems, it was appreciated that subjects could have different levels of difficulties to understand a proof.

Keywords: mathematics teacher's knowledge; mathematical proof; mathematics teachers in initial training.

Resumo

Este estudo teve como objetivo caracterizar o conhecimento de professores de matemáticas em formação inicial na Universidade Nacional da Costa Rica sobre aspectos lógico-sintáticos e matemáticos da demonstração ao avaliar argumentos matemáticos. A pesquisa está posicionada no paradigma interpretativo e tem um enfoque qualitativo. Consiste em duas fases empíricas: na primeira foi aplicado um questionário sobre os aspectos lógico-sintáticos a 25 sujeitos, durante os meses de setembro e outubro de 2018 e, na segunda, um questionário sobre os aspectos matemáticos a 19 sujeitos, durante os meses de maio e junho de 2019. Para a análise das informações foram estabelecidos indicadores de conhecimentos, entendidos como frases para determinar evidências de conhecimentos nas respostas dos sujeitos. Constatou-se que a grande maioria dos futuros professores de matemáticas evidencia conhecimento para discriminar quando um argumento matemático corresponde ou não a uma demonstração em função dos aspectos lógicos e sintáticos, e de elementos matemáticos associados às proposições com a estrutura da implicação universal. Em geral, foram fornecidos maiores evidências de conhecimento sobre os aspectos lógico-sintáticos do que sobre os aspectos matemáticos. Concretamente, evidenciaram que um caso particular ou a prova da proposição recíproca não demonstra o resultado; da mesma forma, evidenciaram conhecimento sobre a demonstração direta e indireta da implicação universal. No caso dos aspectos matemáticos considerados como as hipóteses, os axiomas, as definições e os teoremas, percebe-se que poderiam ter diferentes níveis de dificuldades para compreender uma demonstração.

Palavras-chave: Conhecimento do professor de matemática; demonstração matemática; formação inicial de professores de matemáticas.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

Introducción

La demostración es relevante en las matemáticas y en la matemática escolar. En las matemáticas, el descubrimiento y la demostración de nuevos teoremas se encuentran en el nivel más elevado de la investigación, sin embargo, no existe una definición general aceptada por toda la comunidad matemática. En general, existen dos conceptualizaciones principales, una cercana a la lógica que la considera como una secuencia de proposiciones matemáticas y otra cercana a la práctica de los matemáticos, en donde tienen más relevancia los aspectos semánticos e informales, y la considera más como un argumento para convencer a expertos de la validez de un teorema enfatizando en la explicación de la veracidad (Cabassut *et al*., 2012; Hanna y De Villiers, 2012; Tall *et al*., 2012).

En la matemática escolar también existe el debate entre los aspectos lógico-sintácticos y semánticos de la demostración. En algunos países, aparece en el currículo como un contenido explícito de enseñanza y en otros como un estándar de proceso que debe abordarse en los diferentes temas. Existe consenso a nivel internacional sobre su importancia en la formación de estudiantes en todos los niveles educativos, ya que favorece la comprensión sobre las matemáticas y los procesos para desarrollar, establecer y comunicar el conocimiento matemático. Particularmente, se aboga por proponer tareas a los alumnos en las que la exploración, validación e interpretación generen la necesidad de comprender, además, se considera importante que se enfrenten a resultados inesperados, con ambigüedades y contradicciones que provoquen en ellos la necesidad de demostrar (Cabassut *et al*., 2012; Durand-Guerrier *et al*., 2012a; Mariotti, 2006; NCTM, 2003; Stylianides, 2007; Stylianides *et al*., 2017; Zaslavsky *et al*., 2012).

En el caso de la educación secundaria de Costa Rica, el currículo matemático considera el proceso de "razonar y argumentar" en los estudiantes. La demostración es considerada como una fase formal de la argumentación y tiene un papel relevante en la formulación de conjeturas (Ministerio de Educación Pública, 2012).

Para el abordaje de la demostración matemática en un currículo de la educación secundaria, como contenido o como proceso, la misma debe ser parte del conocimiento requerido por el profesor de matemáticas para su desempeño profesional. Además de conocer los contenidos y sus relaciones, debe saber cómo se producen el conocimiento matemático y las reglas sintácticas de la disciplina (Flores-Medrano *et al*., 2016). En el caso de la demostración matemática debe tener un conocimiento específico que contempla saber sobre su naturaleza, sobre los aspectos lógicos y sintácticos y; sobre los aspectos matemáticos, además del conocimiento sobre sus funciones en las matemáticas. Asimismo, se incluye el conocimiento pedagógico específico para la enseñanza de la demostración que refiere al conocimiento de todos los elementos que posibilitan su enseñanza en la matemática escolar (Buchbinder y McCrone, 2018; Cabassut *et al*., 2012; Durand-Guerrier *et al*., 2012b; Knuth, 2002; Lin *et al*., 2012; Lo y McCrory, 2009; Pietropaolo y Campos, 2009; Tabach *et al*., 2009).

No obstante, en algunas investigaciones se ha detectado que profesores de matemáticas tienen concepciones complejas y distintas sobre la demostración (Montoro, 2007). Ellos manifiestan que su importancia en las matemáticas (Ayalon y Even, 2008; Ramos *et al*., 2015; Viseu *et al*., 2017), sin

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

embargo, tienen puntos de vista diferentes sobre su papel en la matemática escolar (Crespo y Ponteville, 2005; Ramos *et al*., 2015). Asimismo, algunos profesores evidencian una visión reducida sobre la naturaleza de la demostración, deficiencias en el conocimiento matemático involucrado (Martínez-Recio, 1999; Knuth, 2002; Vicario y Carrillo, 2005), presentan argumentos empíricos como si fuesen demostraciones (Flores, 2007; Stylianides y Stylianides, 2009) y basan su convicción en entes externos más que en su propio conocimiento (Lin *et al*., 2012).

En esta línea, el objetivo de este estudio es caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica (UNA) sobre la práctica matemática de la demostración. Puesto que el conocimiento sobre la demostración puede abarcar varios componentes, y los sujetos de investigación están finalizando su programa formativo y, por lo tanto, tienen poca experiencia profesional, esta investigación se delimitó al "conocimiento matemático". Concretamente, al conocimiento sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos en la evaluación de argumentos matemáticos.

Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación de formación de profesores de matemáticas. Esta forma parte del grupo de investigación FQM 193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico. Específicamente, en el conocimiento matemático de los profesores de matemáticas en formación inicial sobre la práctica matemática de la demostración para su desempeño profesional. Da un aporte a la investigación en este tema al brindar insumos que pueden favorecer el abordaje de la demostración matemática en el plan de formación inicial del profesorado de matemáticas en la Universidad Nacional en Costa Rica y en otros planes de formación inicial similares y, realiza una contribución teórica en la construcción de componentes para estudiar conocimiento sobre la demostración matemática, en particular, con indicadores de conocimiento sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos sobre esta.

Marco teórico

El estudio del conocimiento profesional del profesor de matemáticas es un foco de interés en la investigación en Educación Matemática. En la década de los ochenta destacan los trabajos de Elbaz (1983) y Shulman (1986), las investigaciones del *International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME)* (Ponte y Chapman, 2006), las perspectivas teóricas sobre el conocimiento y las creencias en la enseñanza y en el desempeño profesional del profesor de matemáticas en *The Handbook of Mathematics Teacher Education* (Sullivan & Wood, 2008).

Para estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemática sobre la demostración, el interés se centra en el conocimiento sobre el quehacer matemático, es decir, en la forma en la que se produce el conocimiento en las matemáticas (Carrillo *et al*., 2018; Flores-Medrano *et al*., 2016). Por lo tanto, para realizar esta investigación se consideró pertinente contar con un modelo teórico de conocimiento del profesor de matemática que incluya a la demostración dentro de sus categorías. El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* considera a este conocimiento del profesor de matemáticas como parte del conocimiento matemático y le ha asignado un

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

subdominio dentro de él, llamado *Knowledge of Practices in Mathematics (KPM)* (Carrillo *et al*., 2018).

El modelo considera un enfoque analítico con el propósito de obtener información sobre el conocimiento del profesor, particularmente sobre los elementos que lo componen y sus interacciones. Para ello, se consideran dos dominios: *(1) el conocimiento matemático* y *(2) el conocimiento pedagógico del contenido* (Carrillo *et al*., 2018). El objeto de la *práctica* en el contexto de esta investigación, son las matemáticas mismas y, por lo tanto, el interés se centra en su funcionamiento y no en el proceso de su enseñanza. Se entiende a la *práctica matemática* en el sentido que indican Carrillo *et al*. (2018), es decir, como cualquier actividad matemática que se realice de manera sistemática, que sea fundamental en la creación del conocimiento matemático y que posea una base lógica que permita la extracción de reglas.

Según Carrillo *et al*. (2018), la "práctica matemática" *(KPM)* puede ser general o especifica a un tema. La "práctica matemática" general hace referencia al conocimiento del profesor sobre la forma como se desarrollan las matemáticas de manera genérica e independientemente de los temas particulares. La "práctica matemática específica" es un caso particular de la "práctica matemática (KPM)" y está asociada a las particularidades del tema matemático en cuestión. En esta investigación, se considera que el conocimiento sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración es atendido por esta práctica matemática general ya que como lo indican Carrillo *et al*. (2018) incluye el conocimiento del significado de las condiciones necesarias y suficientes, del tipo de demostración para garantizar la veracidad de una afirmación matemática, las diversas prácticas argumentativas, entre otras. Asimismo, el conocimiento sobre los aspectos matemáticos de la demostración está considerado por la práctica matemática específica, pues no solo es requerido el conocimiento lógico-sintáctico general, sino que también considera a las matemáticas involucradas en las proposiciones y sus demostraciones.

Para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional en Costa Rica sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración, se han considerado tres elementos de la *validez lógica* que fueron precisados con base en el análisis conceptual de la demostración matemática (Alfaro, Flores y Valverde, 2019): (1) el tipo de demostración, (2) el tipo de cuantificador y (3) el tipo de conectiva lógica. En el caso de los aspectos matemáticos de la demostración, se debe considerar que las teorías matemáticas son hipotéticas y están conformadas por proposiciones de la forma "si–entonces" lo que supone que la demostración matemática requiere rigor. Los axiomas, hipótesis, definiciones y teoremas involucrados deben ser entendidos y aplicados en sus significados exactos (Cabassut *et al*., 2012). En una teoría formal o sistema matemático, se distinguen tres elementos fundamentales: (1) los axiomas, (2) las definiciones y (3) los teoremas (Cabassut *et al*., 2012; Garrido, 1991; Patterson, 1950; Roberts,2010).

Metodología

Este trabajo se posiciona en el paradigma interpretativo y tiene un enfoque cualitativo debido a que interesa la interpretación de los significados que los sujetos atribuyen a sus acciones (Bryman, 2012; Cohen, Manion y Morrison, 2007; Rodríguez, 2003; Sandín, 2003). Consta de dos fases empíricas para caracterizar el conocimiento de los

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional sobre: (1) los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración matemática, que corresponden a la "validez lógica" de la demostración matemática y (2) los aspectos matemáticos de la demostración, que corresponde a la "validez matemática" de la demostración.

La carrera de formación de profesores de matemáticas de la Universidad Nacional es compartida, la Escuela de Matemática ofrece el componente matemático y la División de Educología brinda el componente pedagógico. Otorga el grado académico de Bachillerato con una duración de cuatro años y el de Licenciatura que consta de tres semestres adicionales y la elaboración de un trabajo final de graduación. En la fase 1, participaron 25 sujetos, 18 matriculados en el cuarto año de la carrera y se les llamó Grupo de Bachillerato (GB) y 7 matriculados el quinto año y se les llamó Grupo de Licenciatura (GL). Ambos grupos constituyeron la totalidad de la población matriculada y activa en esos niveles durante el segundo semestre de 2018. En la fase 2, participaron 19 sujetos, 12 matriculados en el cuarto año (GB) y 7 matriculados en el quinto (GL), de igual forma, ambos grupos correspondían a la totalidad del estudiantado matriculado y activo en esos niveles durante el primer semestre de 2019. De los 12 sujetos matriculados en el cuarto año, 11 participaron en la fase 1. Los 7 sujetos matriculados en el quinto año eran los mismos que participaron en la fase 1. Los sujetos fueron codificados empleando la letra "E" para indicar que era estudiante; la letra "B" para indicar que era de Bachillerato o la letra "L" para indicar que era de Licenciatura; la letra "H" para indicar que era hombre y la letra "M" para indicar que era mujer y; los números del 01 al 19 para los de Bachillerato y de 01 al 07 para los de Licenciatura. Todos los sujetos de investigación han aprobado los cursos del plan de estudios de la carrera mostrando su destreza en la demostración de proposiciones matemáticas.

Recolección de la información

Para la recolección de la información de las fases 1 y 2, se elaboraron dos cuestionarios respectivamente. El cuestionario 1 denominado "validez lógica en la evaluación de argumentos matemáticos" se aplicó en setiembre y octubre de 2018 y el cuestionario 2 llamado "validez matemática en la evaluación de argumentos matemáticos" se aplicó en los meses de mayo y junio de 2019, ambos con una duración aproximada de una hora. En cada caso, los sujetos los completaron de forma individual en los horarios asignados a los cursos matriculados. Previo a su aplicación, fueron revisados por tres especialistas en Educación Matemática quienes se eligieron por su formación en matemáticas y en didáctica de las matemáticas, además de su amplio conocimiento del contexto formativo de los sujetos de investigación.

En la construcción de ambos cuestionarios se tomaron en cuenta elementos del marco teórico sobre el conocimiento de la validez lógica y matemática de la demostración. En el caso del cuestionario 1, los sujetos de investigación debían evaluar la forma de proceder en la demostración de la proposición *P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos* (Winicki-Landman, 1998). Dicha proposición fue empleada por Knuth (2002) en su investigación con 16 profesores de matemáticas en donde les planteó un argumento que demostraba el predicado recíproco.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

En el cuestionario 1, además del argumento sobre el recíproco, se incluyeron tres argumentos adicionales, uno considera un caso particular y otros dos presentan una demostración directa y por reducción al absurdo. De esta manera, el cuestionario consta de cuatro tareas. Además, se indicó la veracidad de dicha proposición. En la Tabla 1, se muestra cada uno de los argumentos matemáticos presentados en las tareas.

El cuestionario 2 consta de cuatro tareas. En cada una de ellas se presenta una proposición matemática y un argumento matemático para garantizar su validez. Los tres primeros tienen errores en los aspectos matemáticos, específicamente, en el primero se hace un uso inadecuado de la "hipótesis" de la proposición matemática, en el segundo, el uso incorrecto de un "axioma" y en el tercero, el uso incorrecto de las "definiciones". En el cuarto, se emplean todos estos elementos de manera correcta. En el caso de que detectaran errores, debían indicar qué modificaciones harían al argumento para que sea una demostración matemática. En la Tabla 2, se muestra cada una de las proposiciones matemáticas y los argumentos matemáticos presentados en las tareas.

Tabla 1. *Argumentos matemáticos de las tareas del cuestionario 1*

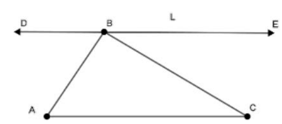
Tarea	Argumento matemático
Tarea 1: Demostración de un caso particular	Considere el número real $(2-\sqrt{3})$. Es claro que $(2-\sqrt{3})>0$. Además, $(2-\sqrt{3})+\frac{1}{(2-\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3})^2+1}{2-\sqrt{3}}=\frac{4-4\sqrt{3}+3+1}{2-\sqrt{3}}=\frac{4(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}=4$ Puesto que es verdadero que $4\geq 2$ entonces se garantiza la validez de la proposición ***P***.
Tarea 2: Demostración del recíproco	Considere un número real cualquiera x. Supóngase verdadero que la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos, es decir que $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$. Luego, $\frac{x^2+1}{x}\geq 2$ y de esta manera se tiene que $\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0$. Al efectuar la resta en el lado izquierdo de la desigualdad se obtiene que $\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$ y ordenando y factorizando el numerador de la fracción se sigue que $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$. Como $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ es cierto y además, $(x-1)^2\geq 0$ también es verdadero, se concluye que $x>0$. En consecuencia la proposición ***P*** es verdadera.
Tarea 3: Demostración directa de la implicación universal	Considere un número real cualquiera x. Supóngase verdadero que el número es positivo, es decir que $x>0$. Se debe garantizar que la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos, es decir que $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$. En efecto, $x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$. Como $(x-1)^2\geq 0$ es verdadera y además, $x>0$ entonces es cierto que $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$. De este modo, es verdadero que $\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\geq 0$ y así, necesariamente, se cumple que $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$ es verdadero, como se quería demostrar. En consecuencia, la proposición ***P*** es verdadera.
Tarea 4: Demostración por reducción al absurdo de la implicación universal	Supóngase que existe un número real x que satisface que es positivo y que la suma de este y su inverso multiplicativo es menor a dos, es decir que, $x>0$ y $\left(x+\frac{1}{x}\right)<2$. Luego se tiene que $\left(x+\frac{1}{x}-2\right)<0$. Por otro lado, $x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$. En consecuencia $\frac{(x-1)^2}{x}<0$ y como $x>0$ necesariamente debe cumplirse que $(x-1)^2<0$. Puesto que es verdadero que $(x-1)^2\geq 0$ entonces, la proposición $(x-1)^2<0 \wedge (x-1)^2\geq 0)$ es verdadera, no obstante, se tiene certeza de que es falsa. En consecuencia, la proposición ***P*** es verdadera.

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

Tabla 2. *Proposiciones y argumentos matemáticos de las tareas del cuestionario 2*

Tarea y Proposición matemática	**Argumento matemático**
Tarea 1: el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo **P1:** *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a \neq 0$ y $(b^2 - 4ac) \geq 0$, entonces $\exists x \in \mathbb{R}\ (ax^2 + bx + c = 0)$.	Supóngase que se tienen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq 0$ y $(b^2 - 4ac) \geq 0$. Se debe demostrar que $\exists x \in R\ (ax^2 + bx + c = 0)$. En efecto, considérese el número real $x = \frac{-b}{2a}$. Luego $ax^2 + bx + c = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2-2b^2+4ac}{4a} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$. Por hipótesis se tiene que $(b^2 - 4ac) \geq 0$ por lo tanto, se puede suponer en particular que $(b^2 - 4ac) = 0$ y de esta manera $ax^2 + bx + c = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-0}{4a} = 0$. Luego, el número real $x = \frac{-b}{2a}$ satisface la existencia.
Tarea 2: el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo **P2:** *Si* $m, n \in \mathbb{Z}$ son tales que m divide a n y viceversa, entonces $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$.	Supóngase que se tienen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que m divide a n y viceversa. Se debe demostrar que $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$. En efecto, como m divide a n y viceversa, entonces, existen dos números enteros p, q tales que (1) $m = n \cdot p$ y (2) $n = m \cdot q$. Sustituyendo (1) en (2) se sigue que $n = (n \cdot p) \cdot q$ y de este modo multiplicando a ambos lados de la igualdad por n^{-1} se tiene que $p \cdot q = 1$. Como p y q son números enteros se tiene que $p = q = 1$ o $p = q = -1$. Si $p = q = 1$ entonces sustituyendo en (1) se tiene que $m = n$ y en consecuencia $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$. Si $p = q = 1$ por ende, sustituyendo en (1) se tiene que $m = n$ y en consecuencia $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$. En cualquier caso, se garantiza que $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$.
Tarea 3: el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar *Si* $m, n \in \mathbb{Z}$ son tales que m y n son números impares, entonces $m + n$ es un número par.	Supóngase que se tienen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que tales que m y n son números impares. Se debe demostrar que $m + n$ es un número par. En efecto, como m y n son números impares, entonces, de acuerdo a la definición de números impares se sigue que existen dos números enteros p, q tales que (1) $2m + 1 = p$ y (2) $2n + 1 = q$. Luego $(2m + 1) + (2n + 1) = p + q$ y de esta manera se sigue que $2m + 2n\ 2 = p + q$, es decir que, $2(m + n) = p + q - 2$. Sea $j = p + q - 2$ y como $p, q, 2 \in \mathbb{Z}$ entonces $j \in \mathbb{Z}$. De esta manera $2(m + n) = j$ con $j \in \mathbb{Z}$ lo que según la definición de número par, garantiza que el número $m + n$ es un número par.
Tarea 4: el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana En cualquier triángulo en la geometría euclidiana la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados. Es decir, dado cualquier triángulo ΔABC, se cumple que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$	Supóngase que se tiene un triángulo cualquiera ΔABC en la geometría euclidiana. Se debe demostrar que la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180 grados, es decir, que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$. En efecto, como el punto B no pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ entonces, en virtud del postulado de las paralelas, existe y es única la recta L que contiene a B y es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Considérese la siguiente figura en la que se muestra lo anterior:  Sean D y E dos puntos de la recta L tales que $D - B - E$ y los puntos A y D del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Como el punto A está en el interior del ángulo $\angle DBC$, se sigue que $m\angle DBC = m\angle DBA + m\angle ABC$ .Además, $m\angle DBC + m\angle CBE = 180^\circ$, pues los dos ángulos forman un par lineal. De esta manera se tiene que $m\angle DBA + m\angle ABC\ m\angle CBE = 180^\circ$ (*) Por otro lado, $m\angle DBA = m\angle BAC$ pues los ángulos son alternos internos entre paralelas. Además, $m\angle CBE = m\angle BAC$ por ser también alternos internos entre paralelas. Al sustituir en (*) se obtiene que $m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle BAC = 180^\circ$ lo que equivale a $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$.

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25, January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

Aspectos metodológicos del análisis de la información

En el análisis de la información de los dos cuestionarios se empleó el análisis de contenido que es una técnica científica de investigación para hacer inferencias replicables y válidas de textos (u otra materia significativa) a los contextos de su uso (Cohen, Manion, y Morrison, 2007; Krippendorff, 2004).

Para analizar las respuestas de los sujetos en el cuestionario 1, se consideró la estructura sintáctica de la proposición dada y en cada argumento se hizo un análisis a priori de los elementos de conocimiento sobre la validez lógica que se podían estudiar. Con base en lo anterior, se consideraron cuatro categorías: (1) demostración de un caso particular, (2) demostración del recíproco, (3) demostración directa de la implicación universal y (4) demostración por reducción al absurdo de la implicación universal. Con base en el estudio de cada uno de los cuatro argumentos, se generaron los indicadores de conocimientos que son frases para determinar evidencias de conocimientos en las respuestas de los sujetos. En la Tabla 3 se presentan tales indicadores.

A cada sujeto se le revisaron exhaustivamente sus respuestas, de manera que se asignaba con **1** o **0** la presencia o ausencia respectivamente de los indicadores de conocimiento definidos. Además, se registraron las respuestas que no pudieron ser clasificadas por tales indicadores y una síntesis de tales respuestas. A continuación, se ilustra

Tabla 3. *Indicadores de conocimiento generados para la implicación universal del cuestionario 1*

Tareas	Indicadores de conocimiento generados
TAREA 1 **Argumento 1: demostración de un caso particular.**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se considera un caso particular.
TAREA 2 **Argumento 2: demostración del recíproco.**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se considera el recíproco del predicado, es decir, se supone verdadero el consecuente $\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 2$ y se garantiza la veracidad del antecedente $x > 0$.
TAREA 3 **Argumento 3: demostración directa de la implicación universal.**	Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario del universo $\mathbb{R}$. Manifiesta que debe suponerse que el antecedente $x > 0$ es una proposición verdadera. Manifiesta que debe garantizarse que el consecuente $\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 2$ es una proposición verdadera con base en el antecedente $x > 0$.y en la teoría matemática en donde están insertas ambas proposiciones. Manifiesta que la propiedad $x > 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 2$ se satisface para todos los elementos del conjunto universo $\mathbb{R}$ en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario.
TAREA 4 **Argumento 4: demostración por reducción al absurdo de la implicación universal.**	Manifiesta que debe suponerse verdadera la negación de proposición dada y que es equivalente a la proposición $\exists x \in \mathbb{R}\left[x > 0 \wedge \left(\frac{x^2+1}{x}\right) < 2\right]$. Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 2\right) \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria, en este caso F_0 es la contradicción $((x-1)^2 < 0 \wedge (x-1)^2 \geq 0)$. Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 2\right)$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\left(\boldsymbol{x} > \mathbf{0} \Rightarrow \left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) \geq \mathbf{2}\right)$ debe ser verdadera.

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

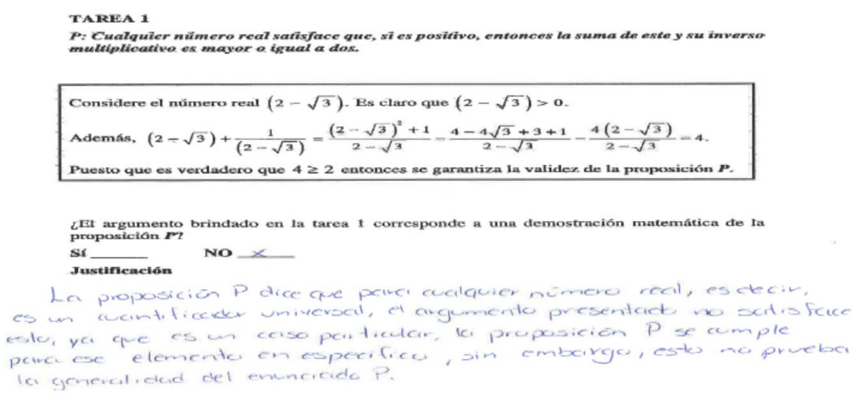
con un caso particular el procedimiento seguido para la codificación de las respuestas de los sujetos que dieron lugar a los resultados. Para ello, se presentan las respuestas del sujeto EBM12 en las tareas 1 y 2.

Con base en el análisis de la Figura 1, se tiene que el sujeto evidencia en su respuesta el indicador de conocimiento definido para la tarea 1 (ver tabla 3): "que el argumento no es una demostración debido a que se considera un caso particular", por lo tanto, para este sujeto se asigna un **1** a este indicador.

Con base en el análisis de la Figura 2, se tiene que el sujeto evidencia en su respuesta el indicador de conocimiento definido para la tarea 2 (ver tabla 3): "que el argumento no es una demostración debido a que se considera el recíproco del predicado, es decir, se supone verdadero el consecuente $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$ y se garantiza la veracidad del antecedente $x > 0$", por lo tanto, para este sujeto se asigna un **1** a este indicador.

Para analizar las respuestas de los sujetos en el cuestionario 2, se establecieron cuatro categorías con base en los elementos sobre la validez matemática planteados en el marco teórico: "(1) el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo" presente en la tarea 1, "(2) el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo" presente en la tarea 2, "(3) el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar" presente en la tarea 3 y "(4) el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la geometría euclidiana" presente en la tarea 4.

Para cada una de las tareas, los investigadores analizamos a priori los elementos matemáticos que consideramos que se podrían tomar en cuenta en la evaluación de los argumentos involucrados.


TAREA 1

P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

Considere el número real $(2-\sqrt{3})$. Es claro que $(2-\sqrt{3})>0$.

Además, $(2-\sqrt{3})+\frac{1}{(2-\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3})^2+1}{2-\sqrt{3}}=\frac{4-4\sqrt{3}+3+1}{2-\sqrt{3}}=\frac{4(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}=4.$

Puesto que es verdadero que $4\geq 2$ entonces se garantiza la validez de la proposición ***P***.

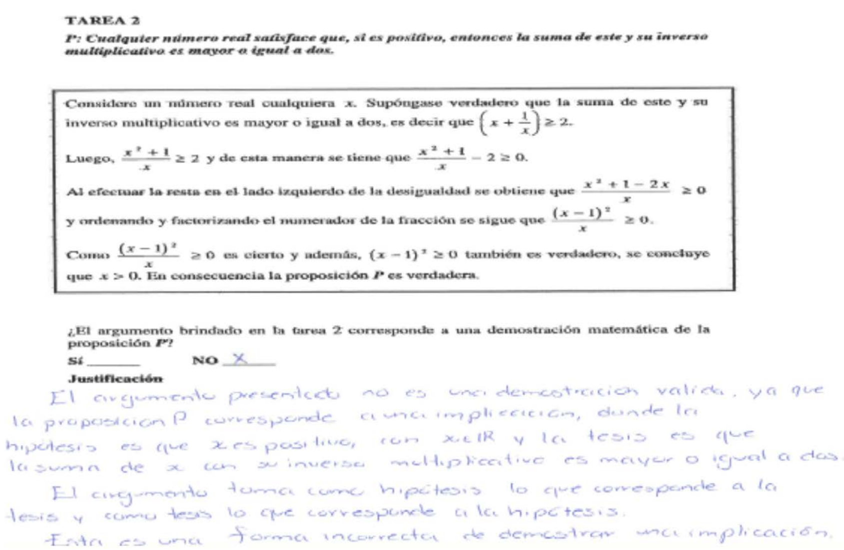
¿El argumento brindado en la tarea 1 corresponde a una demostración matemática de la proposición ***P***?

Sí ______ **NO** __X__

Justificación

La proposición P dice que para cualquier número real, es decir, es un cuantificador universal, el argumento presentado no satisface esto, ya que es un caso particular, la proposición P se cumple para ese elemento en específico, sin embargo, esto no prueba la generalidad del enunciado P.

Figura 1. Respuesta del sujeto EBM12 en la tarea 1


TAREA 2

P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

Considere un número real cualquiera x. Supóngase verdadero que la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos, es decir que $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$.

Luego, $\frac{x^2+1}{x}\geq 2$ y de esta manera se tiene que $\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0$.

Al efectuar la resta en el lado izquierdo de la desigualdad se obtiene que $\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$ y ordenando y factorizando el numerador de la fracción se sigue que $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$.

Como $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ es cierto y además, $(x-1)^2\geq 0$ también es verdadero, se concluye que $x>0$. En consecuencia la proposición ***P*** es verdadera.

¿El argumento brindado en la tarea 2 corresponde a una demostración matemática de la proposición ***P***?

Sí ______ **NO** __X__

Justificación

El argumento presentado no es una demostración valida, ya que la proposición P corresponde a una implicación, donde la hipótesis es que x es positivo, con $x\in\mathbb{R}$ y la tesis es que la suma de x con su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

El argumento toma como hipótesis lo que corresponde a la tesis y como tesis lo que corresponde a la hipótesis.

Esta es una forma incorrecta de demostrar una implicación.

Figura 2. Respuesta del sujeto EBM12 en la tarea 2

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Se ilustra este proceso en la primera tarea, en donde el argumento no es una demostración matemática debido a que se emplea de forma parcial la hipótesis del discriminante no negativo $(b^2 - 4ac) \geq 0$ al suponer que $b^2 - 4ac = 0$. Con base en esto, se planteó un indicador de conocimiento para la explicación de que el argumento no es una demostración matemática, a saber: "Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usa parcialmente la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$". Para realizar la modificación al argumento para que sea una demostración, se consideró que debe emplearse la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$ y con base en ella exhibir al menos uno de los siguientes números reales $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la corrección. Por lo tanto, se plantearon dos indicadores de conocimiento: "Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$ en la corrección del argumento, pero no exhibe ninguno de los números reales que cumplen la existencia" y "Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$ para exhibir alguno de los números reales $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la corrección del argumento". En la Tabla 4 se presentan los indicadores de conocimientos elaborados para las tareas del cuestionario 2.

Tabla 4. *Indicadores de conocimiento generados para las categorías de análisis del cuestionario 2*

Tareas	Indicadores de conocimiento generados
TAREA 1 **Argumento 1: uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usa parcialmente la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$. Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$ en la corrección del argumento pero no exhibe ninguno de los números reales que cumplen la existencia. Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$ para exhibir alguno de los números reales $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la corrección del argumento.
TAREA 2 **Argumento 2: uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se emplea de manera incorrecta el axioma del inverso multiplicativo al considerar al número real n^{-1} sin garantizarse que $n \neq 0$. Manifiesta que deben considerarse dos casos en la corrección del argumento: (1) cuando $n \neq 0$ y ahí emplear el axioma del inverso al multiplicar por n^{-1} y (2) cuando $n = 0$ para deducir que $m = 0$ y por lo tanto $\|m\| = \|n\|$.
TAREA 3 **Argumento 3: uso indebido de las definiciones de número entero par e impar**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usan de forma incorrecta las definiciones de número par e impar. Manifiesta que la definición de número impar debe emplearse en la corrección del argumento para expresar que $2p + 1 = m$ y $2q + 1 = n$; y la definición de número par para concluir que $m + n = 2j$ con $j \in \mathbb{Z}$.
TAREA 4 **Argumento 4: demostración matemática correcta del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana.**	Manifiesta que la hipótesis del teorema se considera un triángulo cualquiera en la Geometría Euclidiana. Manifiesta que se emplea el postulado de las paralelas en la geometría euclidiana en el argumento. Manifiesta que se emplean definiciones matemáticas en el argumento. Manifiesta que se emplean teoremas matemáticos en el argumento.

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

Para cada sujeto se hizo una revisión exhaustiva de sus respuestas de forma análoga a como se hizo en el cuestionario 1. De esta manera, se asignaba con **1** o **0** la presencia o ausencia respectivamente de los indicadores de conocimiento definidos. Además, se hizo un registro de las respuestas que no pudieron ser clasificadas por tales indicadores y una síntesis de tales respuestas.

Resultados

En este apartado se presentan los resultados sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la evaluación de argumentos matemáticos. En la primera sección se consideran los aspectos lógico-sintácticos y en la segunda, los matemáticos.

Resultados de la fase empírica 1: el conocimiento especializado sobre la validez lógica de la demostración matemática

Los resultados se presentan considerando las cuatro categorías generadas al evaluar argumentos matemáticos para demostrar la proposición *P: cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos*: (1) demostración de un caso particular, (2) demostración del recíproco, (3) demostración directa de la implicación universal y (4) demostración por reducción al absurdo de la implicación universal. En cada argumento se presenta la cantidad de sujetos que lo consideraron como una demostración y que evidenciaron en sus respuestas conocimiento de los indicadores propuestos. Se presenta, además, y cuando corresponda para cada argumento, la síntesis de las respuestas de los sujetos que no fueron contempladas en los indicadores y que evidencian conocimiento de los aspectos lógico-sintácticos de la demostración.

Argumento 1: Demostración de un caso particular

En la evaluación de este argumento, 23 sujetos de los 25 consideraron que no correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y todos ellos evidenciaron conocimiento de que esto obedecía a que el argumento consideraba un caso particular. Una respuesta representativa es la siguiente:

- Al tratarse de una proposición que aplica a todos los elementos del conjunto ($\mathbb{R}$), no es posible demostrarla mediante un ejemplo puntual con uno de los elementos en particular, sino que debe partirse tomando un elemento genérico del conjunto que represente a cualquier elemento del conjunto y probar con él que se satisface la propiedad (EBH10).

Un grupo de seis profesores consideró que el argumento sería una demostración matemática si la proposición tuviera un cuantificador existencial, lo que evidencia conocimiento sobre cómo demostrar una proposición con dicho cuantificador exhibiendo un elemento concreto del universo. Una respuesta representativa es la siguiente:

- Se toma específicamente el número $\left(2-\sqrt{3}\right)$ y la proposición es para todo número, así que el argumento es válido para mostrar que existe uno que sí lo cumple (EBM05).

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

Argumento 2: Demostración del recíproco

En la evaluación de este argumento, 23 sujetos de los 25 consideraron que no correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y 19 de ellos evidenciaron conocimiento de que esto obedecía a que el argumento consideraba el recíproco del predicado. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- Porque la proposición tiene una forma de implicación ($P \Rightarrow Q$) así que debe suponerse cierto el antecedente y probar el consecuente, no al revés, puesto que la estructura lógica no es esa (EBH16).
- Pues la proposición P es $\forall x \in \mathbb{R}\,((x > 0) \Rightarrow (x + x^{-1} \geq 2))$ (expresada de manera simbólica) y en el argumento dado, se demuestra el recíproco, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}\,((x + x^{-1} \geq 2)) \Rightarrow (x > 0))$ (ELM07).

Argumento 3: Demostración directa de la implicación universal

En la evaluación de este argumento, 22 sujetos de los 25 consideraron que correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y todos ellos manifestaron conocimiento. En la Tabla 5 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia de los indicadores de conocimiento definidos en sus respuestas para la demostración directa de la implicación universal.

Como puede observarse en la tabla anterior, la mayoría de los sujetos evidencian conocimiento sobre la forma de proceder en la demostración directa de la implicación universal, es decir, conocen que debe suponerse verdadero el antecedente y, posteriormente, debe garantizarse la veracidad del consecuente. No obstante, muy pocos sujetos hicieron referencia explícita a la escogencia de un elemento arbitrario del conjunto universo, que precisamente es lo que avala la forma de proceder en la demostración directa de la implicación. Asimismo, ninguno de los sujetos expresó la validez de la propiedad para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se garantizó para un elemento genérico. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- Porque como la proposición tiene forma de implicación, se supone que $x > 0$ como cierto y se debe verificar que la suma del número y su inverso multiplicativo es cierto, justo como muestra el recuadro. Además de que se hace para un valor de x arbitrario, pero fijo (EBH16).

Tabla 5. *Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la demostración directa de la implicación universal*

Indicadores de conocimiento	**Tarea 3**
Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario del universo $\mathbb{R}$.	8
Manifiesta que debe suponerse que el antecedente $x > 0$ es una proposición verdadera.	20
Manifiesta que debe garantizarse que el consecuente $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$ es una proposición verdadera con base en el antecedente $x > 0$ y en la teoría matemática en donde están insertas ambas proposiciones.	20
Manifiesta que la propiedad $x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$ se satisface para todos los elementos del conjunto universo $\mathbb{R}$ en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario.	0

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

- Se inicia de forma correcta según el cuantificador dándose un elemento cualquiera que sea real. Luego utiliza la implicación de manera correcta, con la hipótesis de que $x > 0$ y menciona el consecuente (lo que debe probar) llegando a probarlo a partir de la operación $x + \frac{1}{x} - 2$ utilizada por conveniencia, ya sabiendo que la expresión que es equivalente a ella es mayor o igual a cero, así ella también lo es y logra probar el consecuente de la implicación (ELH02).

Argumento 4: Demostración por reducción al absurdo de la implicación universal

En la evaluación de este argumento, 21 sujetos de los 25 consideraron que correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y 16 de ellos manifestaron conocimiento de los tres indicadores propuestos. Además, hubo cuatro sujetos que afirmaron que el argumento era una demostración, aunque su respuesta no evidenció ningún indicador al igual que en los cuatro sujetos que manifestaron que no era una demostración matemática.

En la Tabla 6 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para la demostración por reducción al absurdo de la implicación universal.

Algunas respuestas representativas de los sujetos que evidenciaron conocimiento son las siguientes:

- Esta si corresponde a una demostración de un para todo (∀) o para cualquier número real positivo, porque parte de la suposición de que exista un elemento que no cumpla la proposición y al llegar a una contradicción, no queda más que concluir que la proposición es verdadera (EBH17).
- Se está partiendo del supuesto de que la proposición P es falsa y se está llegando a una contradicción lógica, esto concluye que la proposición P no puede ser falsa y de acuerdo con la Ley del medio excluido la proposición debe ser verdadera, correspondiendo a una demostración para la proposición P (ELH06).

Con base en los resultados presentados en esta sección, se aprecia que una gran mayoría de los futuros profesores de matemáticas evidencian conocimiento para discriminar si un argumento es o no demostración matemática de una propiedad aritmética como la propuesta. Muestran

Tabla 6. *Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la demostración por reducción al absurdo de la implicación universal*

Indicadores de conocimiento	Tarea 3
Manifiesta que debe suponerse verdadera la negación de proposición dada y que es equivalente a la proposición $\exists x \in \mathbb{R}\left[x > 0 \wedge \left(\frac{x^2+1}{x}\right) < 2\right]$.	16
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2\right) \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria, en este caso F_0 es la contradicción $((x-1)^2 < 0 \wedge (x-1)^2 \geq 0)$	16
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2\right)$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\left(\boldsymbol{x} > \mathbf{0} \Rightarrow \left(\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) \geq \mathbf{2}\right)$ debe ser verdadera.	16

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

conocimiento para apreciar formas perversas de justificar que no pueden considerarse demostraciones, como la demostración para un caso particular, o la del teorema recíproco, así como para reconocer cuando se han realizado los pasos precisos para demostrar la proposición. No obstante, disminuye considerablemente la cantidad de sujetos que identifican los pasos cuando se plantea una demostración por reducción al absurdo.

Resultados de la fase empírica 2: El conocimiento especializado sobre la validez matemática de la demostración

Los resultados se presentan considerando las cuatro categorías definidas en esta fase para analizar las respuestas de los sujetos de investigación en torno a indicar si el argumento correspondía a una demostración matemática de la proposición dada, explicar las razones de su escogencia y, en el caso de que el argumento dado no correspondiera a una demostración matemática de la proposición dada, indicar cuál o cuáles modificaciones harían al argumento matemático para que lo sea. Para cada categoría se presenta la cantidad de sujetos que consideraron al argumento propuesto como una demostración y que evidenciaron en sus respuestas conocimiento de los indicadores propuestos. Se presenta, además, y cuando corresponda, la síntesis de las respuestas de los sujetos que no fueron contempladas en los indicadores y que evidencian conocimiento de los aspectos matemáticos de la demostración.

Categoría 1: El uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo

En la evaluación de este argumento en la tarea 1, 17 sujetos de los 19 consideraron que no correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y 15 de ellos evidenciaron al menos uno de los indicadores de conocimiento definidos. Además, dos sujetos afirmaron que el argumento era una demostración, pero no evidenciaron ningún indicador al igual que otros dos sujetos que manifestaron que no era una demostración matemática. En la Tabla 7 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Se presentan las respuestas representativas de dos sujetos. Ambos manifestaron que el argumento no era una demostración debido al uso parcial de la hipótesis, el sujeto ELH06 completa su apreciación exhibiendo un número real para satisfacer la existencia, lo que no hace el sujeto EBM12:

- Explicación: Únicamente demuestra que la proposición matemática es válida para el caso cuando $b^2 - 4ac = 0$,

Tabla 7. *Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la categoría 1: El uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo*

Indicadores de conocimiento	Tarea 1
Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usa parcialmente la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$.	15
Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$ en la corrección del argumento pero no exhibe ninguno de los números reales que cumplen la existencia.	8
Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $(b^2 - 4ac) \geq 0$ para exhibir alguno de los números reales $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la corrección del argumento.	7

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

faltaría demostrarla para el caso cuando $(b^2 - 4ac) > 0$. Utiliza un caso particular. Corrección: Para el caso cuando $(b^2 - 4ac) > 0$. Basta considerar el número real $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Luego

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c \\
&= \frac{\cancel{a}}{4\cancel{a}^2}\left(b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2-4ac} + b^2\right) + \frac{b\sqrt{b^2-4ac} - b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2-4ac} + b^2}{4a} + \frac{b\sqrt{b^2-4ac} - b^2}{2a} + c \\
&= \frac{2b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a} + \frac{b\sqrt{b^2-4ac} - b^2}{2a} + c \\
&= \frac{\cancel{2}\left(b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2-4ac}\right)}{\cancel{4}a} + \frac{b\sqrt{b^2-4ac} - b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2-4ac} + b\sqrt{b^2-4ac} - b^2 + 2ac}{2a} \\
&= \frac{0}{2a} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Así, el número real $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ satisface la existencia (ELH06).

- Explicación: En la hipótesis dice que $b^2 - 4ac \geq 0$, pero cuando se hace la demostración solo se toma en cuenta el caso en que $b^2 - 4ac = 0$ y no se toma en cuenta cuando es mayor a cero, por lo cual, la demostración no está del todo correcta. Corrección: Tomaría los dos casos, cuando $b^2 - 4ac = 0$ y cuando $b^2 - 4ac > 0$. Por lo que, faltará buscar un $x \in \mathbb{R}$ que cumpla el segundo caso (EBM12).

Categoría 2: El uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo

En este argumento, presente en la tarea 2, únicamente siete sujetos apreciaron la cualidad abusiva del razonamiento, manifestando que no era una demostración matemática y de ellos cinco evidenciaron la razón mediante alguno de los indicadores propuestos. En la Tabla 8 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Como puede observarse en la tabla anterior, cinco sujetos manifestaron que el argumento no era una demostración debido al uso indebido del axioma del inverso multiplicativo y de ellos, cuatro dieron evidencia en la corrección del argumento de la necesidad de considerar dos casos: cuando $n \neq 0$ y cuando $n = 0$. Se presentan las respuestas representativas de dos sujetos que manifestaron que el argumento no era una demostración debido al uso indebido del axioma del inverso multiplicativo, el sujeto EBH02 que en la corrección del argumento hace referencia a la consideración de casos para utilizar el inverso multiplicativo y el sujeto EBH03 que no lo hace:

Tabla 8. *Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la categoría 2: El uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo*

Indicadores de conocimiento	Tarea 2
Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se emplea de manera incorrecta el axioma del inverso multiplicativo al considerar al número real n^{-1} sin garantizarse que $n \neq 0$.	5
Manifiesta que deben considerarse dos casos en la corrección del argumento: (1) cuando $n \neq 0$ y ahí emplear el axioma del inverso al multiplicar por n^{-1} y (2) cuando $n = 0$ para deducir que $m = 0$ y por lo tanto $\|m\| = \|n\|$.	4

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

- Explicación: Porque se generaliza para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$ y parte de que m divide a n y n divide a m, aunque si uno de ellos es cero para que sean divisibles uno con otro ambos deben ser cero. Para evitar el n^{-1} el cual se indefine en el caso que sea cero. Corrección: Tomado $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ Caso I como se realizó. Por aparte Caso II para $n = 0$ y $m/n \Rightarrow m/0 \Rightarrow mq = 0, q \in \mathbb{Z} = 0$ y como $n/m \Rightarrow nk = m, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0k = m \Rightarrow m = 0$. Por lo tanto $|0| = |0|$. Así por caso I y caso II $|m| = |n|$ (EBH02).
- Explicación: La demostración le falta, ya que se utiliza la definición de que un número sea divisible por otro de una manera correcta, y todo el resto de los pasos están bien. Pero parece que si se debe incluir el caso si $n = 0$ o $m = 0$, ya que en un paso se está multiplicando a ambos lados de la desigualdad por n^{-1}, pero es claro que n no va a ser 0, ya que se contradeciría la hipótesis de que m/n y n/m, pues $m/0$ y $0 \nmid m$. Lo mismo pasaría si $m = 0$. Para que se cumpla con 0, ambos m, n deben ser 0. Corrección: Si $m = 0, n \neq 0, n/0$ y $0 \nmid n$ ¡! contradice la hipótesis. Si $n = 0, m \neq 0, m/0$ y $0 \nmid m$ ¡! contradice la hipótesis. Si $m = 0$ y $n = 0$, $0/0$ y $0/0$, se cumple el teorema pues $|0| = |0|$ (EBH03).

En cuanto a los 12 sujetos que manifestaron que el argumento era una demostración matemática, ninguno de ellos evidenció algunos de los indicadores propuestos. Sin embargo, tres de ellos hicieron referencia en su explicación al inverso multiplicativo. El sujeto EBM11 planteó que no era necesario que n^{-1} fuese un número entero, pero sin precisar que su existencia no estaría garantizada en el caso de que n fuera cero. Los sujetos EBM05 y EBH16 manifestaron que n^{-1} existe cuando n es diferente a cero, no obstante, evidenciaron un conocimiento de la divisibilidad que implicaba que n era diferente de cero. A continuación, se presentan las tres respuestas:

- Explicación: No se necesita que el n^{-1} sea un número entero, por ello no nos afectaría en ningún momento. Además, se parte de la definición para concluir con un valor de verdad (EBM11).
- Explicación: Los argumentos están correctos. Es claro que si m/n y n/m no pueden ser cero n y m. Así sería bueno especificar que existe n^{-1}. Parte las hipótesis, traduce bien y aplica las propiedades adecuadas. Realiza claramente la conclusión que evidencia lo que tiene que mostrar (EBM05).
- Explicación: El único problema que podría presentar el argumento es cuando se multiplica por n^{-1} en la igualdad, pero como por hipótesis m/n; entonces, $m \neq 0$ y como n/m entonces, $n \neq 0$ por lo que n^{-1} está perfectamente definido. Por lo que el resto de razonamientos a partir de ahí, tienen todo el sentido, y también se cubren todos los vacíos que podrían quedar, lo único que se puede agregar es que la sustitución se puede realizar en cualquiera de las dos ecuaciones resultantes de la definición de m/n y n/m (EBH16).

Las respuestas anteriores muestran que los sujetos EBM05 y EBH16 consideraron al argumento como una demostración debido a imprecisiones en su conocimiento sobre la divisibilidad, pero evidencian conocimiento de que un número real posee inverso multiplicativo si es diferente de cero.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

Categoría 3: El uso indebido de las definiciones de número entero par e impar

En este argumento, presente en la tarea 3, 16 sujetos de los 19 manifestaron que no era una demostración matemática y, de ellos, 14 evidenciaron alguno de los indicadores propuestos. Además, tres sujetos afirmaron que el argumento era una demostración, pero no evidenciaron ningún indicador al igual que otros dos sujetos que manifestaron que no era una demostración matemática. En la Tabla 9 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Como se observa en la tabla anterior, 13 sujetos manifestaron que el argumento no era una demostración por el uso indebido de las definiciones de número par e impar y todos ellos evidenciaron en la corrección del argumento el uso correcto de las definiciones. Hubo un sujeto, EBH02, que no evidenció el primer indicador en su explicación, sin embargo, en la corrección del argumento manifestó conocimiento del segundo indicador.

Se presentan las respuestas representativas de tres sujetos que manifestaron que el argumento no era una demostración. La respuesta del sujeto EBH02 mencionado en el párrafo anterior y las respuestas de los sujetos EBM12 y ELH02 que presentan evidencia de los dos indicadores de conocimiento planteados:

- Explicación: En línea 3 toma $2m + 1 = p$, claramente toma p como un número par. Así $2m + 1 = p \Rightarrow 2m = p - 1 \Rightarrow m = \frac{p-1}{2}$ y p es par, entonces, $p - 1$ es impar, entonces, $m = \frac{p-1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ya que $2 \nmid (p - 1)$. Misma idea para $2n + 1 = q$. Corrección: En línea 3, $m = 2p + 1$ y $n = 2q + 1$. Luego, $m + n = 2p + 1 + 2q +1 = 2p + 2q + 2 = 2(p + q + 2)$. Donde $p + q + 2 \in \mathbb{Z}$. Tome $a = p + q + 2$. Así $m + n = 2(p + q + 2) = 2a$, esto es definición de ser par. Garantizando que $m + n$ es par (EBH02).
- Explicación: Al decir que $2m + 1 = p$ garantiza que p es impar, sin embargo, no garantiza que el m sea impar, ya que si m es par o impar se cumple lo mismo. Por otra parte, llega a que $2(m + n) = j$, $j \in \mathbb{Z}$ esto garantiza que j es par, pero no que $m + n$ es par, esta suma podría ser impar que al multiplicarla por 2 el j da par. Corrección: Tomaría más bien la definición para m y n, $m = 2p + 1$ y $n = 2q + 1$ así al sumarlos me quedaría $m + n = 2(p + q + 1)$ donde asegura que $m + n$ sí es par (EBM12).
- Explicación: Se definen de forma incorrecta los valores de m y n como enteros, debe ir al revés el valor de m por n, y de igual forma n por q. Corrección: Como m y n son impares cumplen que: $m = 2p + 1$ y $n = 2q +1$, con $p, q \in \mathbb{Z}$. Luego $m + n = 2p + 2q + 2 \Rightarrow m + n = 2(p + q + 1)$, con $p + q + 1 \in \mathbb{Z}$. Así, $m + n = 2 \cdot r$, con $r = p + q + 1$ y $r \in \mathbb{Z}$

Tabla 9. *Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la categoría 3: El uso indebido de las definiciones de número entero par e impar*

Indicadores de conocimiento	Tarea 2
Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usan de forma incorrecta las definiciones de número par e impar.	13
Manifiesta que debe emplearse en la corrección del argumento la definición de número *impar* para expresar que $2p + 1 = m$ y $2q + 1 = n$; y la definición de número *par* para concluir que $m + n = 2j$ con $j \in \mathbb{Z}$	14

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

teniendo la forma de un número par $m + n$ (ELH02).

Categoría 4: El uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la geometría euclidiana

En este argumento, presente en la tarea 4, todos los 19 sujetos manifestaron que era una demostración matemática, aunque la mayoría se limitó a realizar esta apreciación, pues solo nueve evidenciaron alguno de los indicadores de conocimiento propuestos. En la Tabla 10 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Con base en la tabla anterior, se puede notar que, pese a que todos los futuros profesores de matemáticas identificaron como válida la demostración de la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo, ninguno hizo referencia a que la proposición es una afirmación general, que parte de la hipótesis de que se consideraba un triángulo cualquiera en la Geometría Euclidiana. Sin embargo, dos sujetos evidenciaron conocimiento sobre el uso del postulado de las paralelas, definiciones y teoremas simultáneamente; cuatro sujetos únicamente evidenciaron el uso del postulado de las paralelas y tres sujetos únicamente evidenciaron el uso de teoremas matemáticos en el argumento. Para ilustrar esto, se presentan tres respuestas: la del sujeto EBM12 que evidencia el uso del postulado de las paralelas, definiciones y teoremas; la del sujeto EBH02 que refiere únicamente al postulado de las paralelas y la del sujeto EBM05 que refiere únicamente al uso de teoremas:

- Explicación: Los teoremas que está utilizando ya han sido probados, el postulado de las paralelas y el de los ángulos alternos internos entre paralelas. De igual manera, se emplean bien las definiciones, como la de par lineal, ángulo interior (EBM12).
- Explicación: Se garantiza que se establece la geometría euclidiana. Por lo que el 5to postulado es cierto. Además, garantiza que los puntos generados crean un par lineal para sustituir correctamente los ángulos por sus alternos internos correspondientes. Esto demuestra que la suma de ángulos internos es 180˚ (EBH02).

Tabla 10. *Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la categoría 4: el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana*

Indicadores de conocimiento	Tarea 2
Manifiesta que la hipótesis del teorema es considerar un triángulo cualquiera en la Geometría Euclidiana.	0
Manifiesta que el postulado de las paralelas en la Geometría Euclidiana se emplea en el argumento.	6
Manifiesta que definiciones matemáticas se emplean en el argumento.	2
Manifiesta que teoremas matemáticos se emplean en el argumento.	5

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

- Explicación: Utiliza todos los enunciados y los teoremas de forma correcta. Muestra claramente que cada uno de los pasos es verdadero. Utiliza propiedades. Parte de las hipótesis, aplica las propiedades de forma correcta y muestra claramente lo que debe probar. Realiza la conclusión (EBM05).

En el caso de los 10 sujetos de investigación que indicaron que el argumento era una demostración de la proposición dada, pero que no evidenciaron ninguno de los indicadores propuestos, en sus respuestas apreciamos imprecisiones para justificar la validez de un argumento matemático cuando este es correcto, basando sus respuestas en generalidades como: la presencia de una estructura lógica adecuada, es decir, el partir de una proposición verdadera y generar conclusiones parciales verdaderas que conducen a la conclusión, la consideración de todas las posibilidades y su correspondiente justificación, el uso de resultados anteriores de la geometría euclidiana y la claridad del argumento.

Con base en los resultados presentados en esta sección, se aprecia que la totalidad de los futuros profesores de matemáticas evidencian conocimiento para determinar cuándo un argumento constituye una demostración matemática de una proposición, aunque pocos sujetos brindan las justificaciones para ello. Asimismo, la gran mayoría evidencia conocimiento para discriminar si un argumento no corresponde a una demostración matemática en función de aspectos matemáticos como el uso parcial de la hipótesis y el uso indebido de las definiciones. Sin embargo, existe una disminución importante de sujetos que identifica el uso indebido del axioma del inverso multiplicativo.

En cuanto a la corrección de los argumentos que no corresponden a una demostración matemática, hay un descenso de la cantidad de sujetos que consideran en sus propuestas de modificación al argumento, los aspectos matemáticos que lo invalidaban: (1) en el argumento *3*, 14 de 19 sujetos sugirieron que debían modificarse las definiciones de número par e impar, (2) en el argumento 1, siete de 19 sujetos indicaron que debía emplearse la hipótesis completa del discriminante no negativo y exhibieron algún número real para satisfacer la existencia, mientras que ocho de 19 sujetos solo hicieron referencia al uso de la hipótesis completa y *(3) en el argumento 2*, cuatro de 19 sujetos manifestaron que debían considerarse dos casos para el número en cuestión, cuando era cero y cuando era diferente de cero para poder emplear el axioma del inverso multiplicativo.

Conclusiones

La mayoría de los profesores de matemáticas en formación inicial evidenció conocimiento de los aspectos lógico-sintácticos en la evaluación de los cuatro argumentos matemáticos propuestos en el cuestionario 1, para la implicación universal, correspondiente a la proposición matemática *P: cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos*.

En los dos primeros argumentos, la mayoría de los sujetos manifestó que no correspondían a una demostración, apreciando que, en el primero, la demostración aludía a un caso particular y que en el segundo, se demostraba el recíproco del predicado. En los argumentos tercero y cuarto, la mayoría de sujetos indicaron que correspondían a una demostración. En el caso del tercero,

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

sobre la demostración directa de la implicación universal, la mayoría evidenció conocimiento de que debía suponerse cierto el antecedente y posteriormente, garantizarse la veracidad del consecuente. No obstante, solo una minoría evidenció conocimiento sobre la consideración de un elemento genérico del universo y ninguno hizo referencia a que la propiedad era válida en virtud de que se había garantizado para un elemento genérico que representa a cualquiera del universo. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Durand-Guerrier *et al*. (2012b). En el cuarto argumento, sobre la demostración por reducción al absurdo de la implicación universal, la mayoría brindó evidencias de conocimiento de los tres indicadores propuestos, a saber, que debía suponerse la negación de la proposición dada, que debía generarse una contradicción y que una vez generada se podría concluir que la proposición original era verdadera.

La proposición del cuestionario 2, fue empleada por Knuth (2002) en su investigación con 16 profesores de matemáticas en donde les planteó un argumento que demostraba el predicado recíproco. Según este investigador, 10 profesores lo consideraron como una demostración y se enfocaron en la corrección de las manipulaciones algebraicas más que en los aspectos de validez. En nuestro estudio, la mayoría de los profesores de matemáticas en formación inicial se enfocaron en la corrección lógica más que en las matemáticas empleadas en cada argumento, lo que nos permite observar un conocimiento adecuado sobre estos aspectos lógico-sintácticos de la implicación universal. Concretamente, evidencian conocimiento de que un caso particular no demuestra, y aprecian el argumento que emplea esta falacia. También, han demostrado conocimiento sobre cómo proceder en la demostración directa y por reducción al absurdo.

Estudiar el conocimiento sobre los aspectos matemáticos de la demostración es complejo, ya que, además de los elementos lógico-sintácticos intervienen los conceptos y sus significados en la teoría matemática en la que se inserta la demostración. En este sentido, Mariotti (2006) señala que, contrario a lo que ocurre dentro de una teoría formal, en la práctica de la deducción matemática existe dependencia de la compresión y de la asimilación previa del significado de los conceptos a partir de los cuales ciertas propiedades se siguen de manera lógica. Los aspectos matemáticos considerados en esta investigación como las hipótesis, los axiomas, las definiciones y los teoremas podrían tener diferentes niveles de dificultad para comprender una demostración.

En el caso del primer argumento, correspondiente a la categoría denominada "el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo" (en una ecuación de segundo grado en una variable real), la hipótesis aparece de forma explícita en la proposición a demostrar. La gran mayoría de los sujetos de investigación evidenció que no era una demostración debido a este uso parcial. En la corrección del argumento, una minoría de los sujetos evidenció conocimiento de que debía considerarse la hipótesis del discriminante en su totalidad y además, buscó y propuso un número real que cumpliera con la existencia.

En los restantes tres argumentos, las definiciones, axiomas y teoremas empleados no necesariamente están explícitos en la proposición a demostrar y, por lo tanto, se requiere que los sujetos los conozcan a profundidad para poder evaluar su uso en la demostración. En el segundo argumento correspondiente a la categoría denominada "el

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470

uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo” (para demostrar la igualdad en valor absoluto de dos números enteros divisibles entre sí), muy pocos sujetos evidenciaron conocimiento de que el argumento no era una demostración por el uso inadecuado del inverso multiplicativo. Asimismo, fueron muy pocos los que en la corrección del argumento manifestaron que debía considerarse que el número en cuestión debía ser no nulo para poder emplear su inverso multiplicativo.

En el tercer argumento correspondiente a la categoría denominada “el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar” (para demostrar la paridad de la suma de dos números impares), la mayoría evidenció que no era una demostración debido a este uso inadecuado de las definiciones. En la corrección del argumento, la mayoría de los sujetos evidenció conocimiento de las condiciones algebraicas que caracterizan a los números pares e impares, posiblemente porque las han empleado con frecuencia en los cursos de la carrera. No obstante, el desconocimiento de todas las condiciones de las definiciones podría derivar en que los sujetos evalúen de forma errónea un argumento. Por ejemplo, en el segundo argumento, dos sujetos consideraron que en la definición de divisibilidad los números involucrados son necesariamente no nulos, por lo tanto, estaba justificada para ellos la existencia del inverso multiplicativo, esto implicó que consideraran el argumento como una demostración.

En el cuarto argumento correspondiente a la categoría denominada “el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana”, la totalidad de los sujetos manifestó que el argumento era una demostración matemática. Sin embargo, solo una minoría evidenció conocimiento de los indicadores propuestos. Este hecho hace pensar que es más sencillo explicar cuándo un argumento matemático posee errores que justificar por qué es correcto.

Según Mariotti (2006), tradicionalmente, la demostración se considera en sí misma como si fuera posible separarla de la proposición a la que da sustento y del marco teórico dentro del que tal soporte tiene sentido. En esta investigación se ha evidenciado que la gran mayoría de los sujetos de investigación han apreciado que en una demostración todos estos elementos están involucrados de forma simultánea y no es posible comprender el sentido de una demostración matemática sin vincular la proposición a la cual refiere y a la teoría matemática en donde se inscribe. De esta forma, en la práctica matemática se demuestran proposiciones verdaderas, pero el término “verdad” debe entenderse siempre en relación con una teoría particular.

Los resultados obtenidos apoyan la apreciación de Cabassut *et al*. (2012) en la que afirman que la demostración matemática no establece hechos, sino que garantiza la validez de proposiciones del tipo “si-entonces” esto implica que las hipótesis, axiomas, teoremas y definiciones deben entenderse y aplicarse en sus significados precisos en una teoría matemática. Se considera así que los aspectos matemáticos de la demostración pueden contribuir al conocimiento especializado de los profesores de matemática para comprender que los resultados matemáticos no son verdades universales. Por ejemplo, cuando se afirma que la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180 grados, el conocimiento sobre la validez matemática de la demostración

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

permite entender que en cierta teoría este resultado puede ser derivado.

Reconocimientos

Este trabajo se enmarca dentro del Proyecto «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico). Además, se tuvo el apoyo del proyecto PCG2018-095765-B-I00 del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) y de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica.

Consentimiento informado

Los autores declaramos que los participantes de este estudio fueron informados sobre el tratamiento de la información.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: C.A.C. 50 %, P.F.M. 25 % y G.V.S. 25 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [**C.A.C.**], previa solicitud razonable.

Referencias

Alfaro, C.; Flores, P. & Valverde, G. (2019). La demostración matemática: Significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, *33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Ayalon, M. & Even, R. (2008). Deductive reasoning: In the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 235-247. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9136-2

Bryman, A. (2012). *Social research methods*. Oxford University Press.

Buchbinder, O. & McCrone, S. (2018). Taking proof into secondary classrooms–supporting future mathematics teachers. In T.E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of South Carolina & Clemson University.

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A, Furinghetti, F., Jahnke, H. N. & Morselli, F. (2012). Conceptions of proof–In research and teaching. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203029053

Crespo, C. & Ponteville, C. (2005). Las funciones de la demostración en el aula de matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 307-312. http://funes.uniandes.edu.co/5954/1/CrespoFuncionesAlme2005.pdf

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S. & Tanguay, D. (2012a). Argumentation and proof in the mathematics classroom. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-367). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_15

Durand-Guerrier, V., Boero, P.; Douek, N., Epp, S. S. & Tanguay, D. (2012b). Examining the role of logic in teaching proof. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_16

Elbaz, F. (1983). *Teacher Thinking. A Study of Practica! Knowledge*. Croom Helm.

Flores, Á. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M. & Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 204-221. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Garrido, M. (1991). *Lógica simbólica*. Editorial Tecnos.

Hanna, G. & De Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1-10). Springer. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_1

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405. https://doi.org/10.2307/4149959

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Sage publications.

Lin, F. L., Yang, K. L., Lo, J. J., Tsamir, P., Tirosh, D. & Stylianides, G. (2012). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 327-346). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_14

Lo, J. & McCrory, R. (2009). Proof and proving in mathematics for prospective elementary teachers. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education Vol. 2* (pp. 41-46). Springer.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics* education (pp. 173-204).: Sense Publisher. https://doi.org/10.1163/9789087901127_008

Martínez-Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada. Documento físico.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. https://mep.go.cr/sites/default/files/pro-gramadeestudio/programas/matematica.pdf

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *2*(1), 101-121.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.

Patterson, C. (1950). *Los principios del pensamiento correcto: lógica.* Editorial Americalee.

Pietropaolo, R. & Campos, T. (2009). Considerations about Proof in School Mathematics and in Teacher Development Programmes. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education Vol. 2* (pp. 142-147). Springer.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Sense Publisher. https://doi.org/10.1163/9789087901127_017

Ramos, M., Moreno, G. & Marmolejo, E. (2015). Concepciones de profesores de bachillerato sobre la demostración matemática en contexto escolar. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, *14*. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1046/428

Roberts, C. (2010). *Introduction to mathematical proofs: a transition.*:Chapman y Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/b17173

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Revista del Instituto de Investigaciones Educativas, 7*(12), 23-40.

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones.* McGraw-Hill.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge ghrotw in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 314-352.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237–266).

Sullivan, P. & Woods, T. (Eds.). (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Sense Publisher.

Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D. & Dreyfus, T. (2009). Teachers' Knowledge of Students' Correct and Incorrect Proof Constructions. En F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education Vol. 2* (pp. 214-219). Springer.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M. & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-49). Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2

Vicario, V. & Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática: El caso de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos y las funciones de la demostración. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. *Noveno Simposio de la SEIEM* (pp. 145-152). Universidad de Córdoba.

Viseu, F., Menezes, L., Fernandes, J. A., Gomes, A., & Martins, P. M. (2017). Conceções de Professores do Ensino Básico sobre a Prova Matemática: influência da experiência profissional. *Bolema*, *31*(57), 430-453. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a21

Winicki-Landman, G. (1998). On Proofs and Their Performance as Works of Art. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 722-725. http://www.jstor.org/stable/27970759

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I. & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229). Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_9

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr