Uniciencia Vol. 36(1), pp. 1-24, January-December, 2022
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr
http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria

Cognitive analysis of probability comparison tasks by preservice primary school teachers

Análise cognitiva das tarefas de comparação de probabilidades por futuros professores do ensino fundamental

María Burgos[1], **María del Mar López-Martín**[2 *],
Carmen Gloria Aguayo-Arriagada[2], **Verónica Albanese**[1]

Received: Nov/4/2021 • Accepted: Dec/11/2021 • Published: Nov/01/2022

Resumen

Para favorecer el aprendizaje de las matemáticas, el profesorado debe ser capaz de analizar, interpretar y evaluar la actividad matemática de sus estudiantes, tomando decisiones sobre la comprensión y dificultades que muestran al resolver tareas matemáticas. Esta competencia de análisis cognitivo permite, al docente, comprender los procesos de aprendizaje matemático y establecer diferentes posibilidades de institucionalización del conocimiento matemático implicado. **[Objetivo]** El presente trabajo tiene como objetivo describir los resultados de la evaluación de los conocimientos y competencias de futuros profesores de Educación Primaria para interpretar las respuestas de estudiantes a tareas de comparación de probabilidades, identificar estrategias incorrectas y reconocer razonamiento proporcional en la actividad matemática. Asimismo, se analizan las distintas formas de actuación que proponen los futuros docentes con objeto de que los alumnos superen las dificultades que los llevaron a dar una solución inadecuada. **[Metodología]** Para tal fin, se ha realizado una investigación de carácter descriptivo y cualitativo, para la cual se ha contado con la colaboración de 116 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Almería (España). La intervención se llevó a cabo una vez finalizado el proceso de formación en torno a los contenidos matemáticos del Bloque de Estadística y Probabilidad. **[Resultados]** Entre los resultados obtenidos destacamos un conocimiento didáctico-matemático del razonamiento proporcional y probabilístico que impide a los futuros profesores interpretar y tomar decisiones en relación con las respuestas de los alumnos. **[Conclusiones]** Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de implementar intervenciones formativas que permitan solventar adecuadamente estas situaciones habituales en los centros educativos.

María Burgos, mariaburgos@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4598-7684
María del Mar López-Martín, mdm.lopez@ual.es, https://orcid.org/0000-0001-8677-9606
Carmen Gloria Aguayo-Arriagada, cgaguayo@ual.es, https://orcid.org/0000-0001-9576-2312
Verónica Albanese, vealbanese@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-3176-2468
*Autora para correspondencia
1 Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.
2 Departamento de Educación, Universidad de Almería, Almería, España

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

Palabras clave: Probabilidad; razonamiento proporcional; formación de profesores; enfoque ontosemiótico; análisis cognitivo.

Abstract

To promote mathematical learning, teachers must be able to analyze, interpret and assess students' mathematical activity, making decisions about their understanding of, and difficulties in, solving mathematical tasks. This cognitive analysis skill enables teachers to understand mathematical learning processes and to establish different ways of institutionalizing the mathematical knowledge involved. **[Objective]** This work is intended to present the results of an assessment of preservice Primary Education teachers' knowledge and abilities to interpret students' responses to probability comparison tasks, identify incorrect strategies and recognize proportional reasoning in mathematical activity. Furthermore, the strategies proposed by preservice teachers to help students overcome the difficulties that led them to obtain inadequate solutions are analyzed. **[Methodology]** Descriptive and qualitative research was carried out with the collaboration of 116 preservice Primary Education teachers from the University of Almería (Spain). The investigation was carried out once the process of training in the mathematical contents of Statistics and Probability had been completed. **[Results]** One of the most important results obtained is a didactic-mathematical knowledge of the type of proportional and probabilistic reasoning that impedes preservice teachers in their interpretation and decision-making about student responses. **[Conclusions]** These results highlight the need to implement educational solutions to adequately resolve these common situations in schools.

Keywords: Probability; proportional reasoning; teachers' education; onto-semiotic approach; cognitive analysis.

Resumo

Para aperfeiçoar o aprendizado matemático, os professores devem ser capazes de analisar, interpretar e avaliar a atividade matemática de seus estudantes, tomando decisões sobre sua compreensão e dificuldades em resolver tarefas matemáticas. Esta competência de análise cognitiva permite ao professor compreender os processos de aprendizagem matemática e estabelecer diferentes possibilidades de institucionalização dos conhecimentos matemáticos envolvidos. **[Objetivo]** O objetivo deste trabalho é descrever os resultados da avaliação dos conhecimentos e habilidades dos futuros professores da escola primária na interpretação das respostas dos estudantes às tarefas de comparação de probabilidades, identificando estratégias incorretas e reconhecendo o raciocínio proporcional na atividade matemática. Ela também analisa as diferentes formas de ação propostas pelos futuros professores com o objetivo de levar os estudantes a superar as dificuldades que os guiaram a dar uma solução inadequada. **[Metodologia]** Para este fim, foi realizada uma pesquisa descritiva e qualitativa com a colaboração de 116 futuros professores de Educação Primária da Universidade de Almeria (Espanha**)**. A intervenção foi realizada uma vez concluído o processo de formação sobre o conteúdo matemático do bloco de Estatística e Probabilidade. **[Resultados]** Entre os resultados obtidos, destacamos um conhecimento didático-matemático de raciocínio proporcional e probabilístico que impede que futuros professores interpretem e tomem decisões em relação às respostas dos estudantes. **[Conclusões]** Estes resultados destacam a necessidade de implementar intervenções de treinamento que nos permitam resolver adequadamente estas situações comuns nas escolas.

Palavras-chave: Probabilidade; raciocínio proporcional; formação de professores; abordagem ontosemiótica; análise cognitiva.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

Introducción

Una inquietud importante dentro del ámbito de educación matemática consiste en precisar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que debería tener el profesor de matemáticas para desarrollar su labor docente de manera adecuada (Chapman, 2014; English, 2008; Hill *et al*., 2008; Mason, 2016). Se acepta que el profesor de matemáticas debe conocer las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas que contempla el currículo y ser capaz de aplicarlas en el desempeño de su labor docente. Sin embargo, también es imprescindible que posea un conocimiento especializado del propio contenido, de las transformaciones que se deben aplicar a este mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje y de los factores de tipo psicológico, sociológico y pedagógico, entre otros, que condicionan dichos procesos.

Las investigaciones interesadas en analizar cómo los docentes interpretan la comprensión de los estudiantes sobre determinados contenidos y cómo actúan para responder a sus errores, ponen de manifiesto que un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores la tarea de analizar e interpretar las respuestas de los alumnos. Ello ocasiona la toma de decisiones de acción no pertinentes y que, aun así, el conocimiento del contenido no es suficiente para que los profesores reconozcan la comprensión matemática de sus alumnos (Bartell *et al*., 2013, Biza *et al*., 2007; Fernández *et al*., 2012; Jacobs *et al*., 2010; Jakobsen *et al*., 2014; Simpson y Haltiwanger, 2017; Son, 2013). En este sentido, y dentro del campo de la probabilidad, diversos autores destacan que los profesores en formación poseen un conocimiento matemático y didáctico insuficiente (Batanero *et al*., 2012; Batanero *et al*., 2004; Gea *et al*., 2017; Gómez *et al*., 2013; Pereira-Mendoza, 2002; Vásquez y Alsina, 2015a, 2015b) presentando ciertas limitaciones en la descripción y evaluación de respuestas de alumnos (Batanero *et al*, 2015; Mohamed, 2012). Un razonamiento proporcional insuficiente puede estar detrás de gran parte de los errores de interpretación de conceptos o aplicación de procedimientos, tanto en estudiantes, como en futuros profesores en el ámbito de la probabilidad (Begolli *et al*., 2021; Boyer y Levine, 2015; Bryant y Nunes, 2012; Langrall y Mooney, 2005; Van Dooren, 2014; Watson, 2005; Watson *et al*., 2007).

El presente trabajo pretende caracterizar y valorar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas de futuros profesores de educación primaria para: a) interpretar las respuestas de alumnos a una tarea de comparación de probabilidades, b) identificar estrategias incorrectas y reconocer razonamiento proporcional en la actividad matemática de los alumnos, y c) proponer estrategias que ayuden a los alumnos a superar las dificultades que los llevaron a dar una solución inadecuada. Los resultados de esta investigación nos permitirán diseñar, implementar y evaluar acciones formativas para desarrollar en los futuros profesores dichos conocimientos y competencias didáctico-matemáticas.

Marco teórico y antecedentes

Para afrontar el estudio de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor, nos posicionamos desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino *et al*., 2007). En esta sección describimos, en primer lugar, el modelo de conocimiento del profesor

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

desarrollado en el marco del EOS y que asumimos en nuestra investigación. A continuación, especificamos los antecedentes en relación con el conocimiento del profesor en probabilidad y razonamiento proporcional.

Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas

El modelo de categorías de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (en adelante CCDM) del profesor de matemáticas (Godino *et al*., 2017) desarrolla el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) propuesto por el EOS (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan *et al*., 2015) que, a su vez, extiende y complementa el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) de conocimiento matemático para la enseñanza (Ball *et al*., 2008).

En el modelo CCDM se asume que el profesor debe tener un conocimiento matemático *per se,* que coordine el *conocimiento matemático común* relativo al nivel educativo donde imparte su docencia (compartido con sus estudiantes y suficiente para resolver los problemas y tareas propuestas en el currículo), con el *conocimiento ampliado* del contenido matemático que permita conectar el contenido de estudio con otras nociones que aparecen en el currículo del nivel educativo en cuestión o con nociones matemáticas subsecuentes. Sin embargo, a medida que se ponga en juego algún contenido matemático, el profesor debe tener un *conocimiento especializado o didáctico-matemático* de las distintas facetas que afectan la planificación y gestión de un tema matemático específico: epistémica (significados institucionales del contenido), ecológica (orientar las tareas de acuerdo con el currículo institucional obligatorio), cognitiva (comprender el pensamiento del estudiante), afectiva (reaccionar a la angustia, indiferencia, enfado, etc., manifestado por los estudiantes), interaccional (identificar y responder a los conflictos e interacciones de los estudiantes) y mediacional (elegir los recursos más adecuados para la enseñanza).

En este trabajo, nos centramos fundamentalmente en algunos aspectos de las facetas epistémica, cognitiva e interaccional del conocimiento didáctico-matemático. La faceta epistémica concierne al conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, es decir, la forma particular en la que el profesor de matemáticas conoce y comprende las matemáticas. En particular, los docentes, además de las matemáticas que les permiten resolver problemas (lo que implica su conocimiento común y ampliado), deben ser capaces de comprender y movilizar la diversidad de significados parciales de un objeto matemático específico, resolver una tarea a través de diferentes procedimientos, proporcionar varias justificaciones e identificar el conocimiento involucrado durante el proceso de resolución de una tarea matemática. La faceta cognitiva concierne al conocimiento de cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje. Como señalan Pino-Fan *et al*. (2015), esta subcategoría considera el conocimiento necesario para “reflejar y evaluar” el grado de ajuste entre los significados personales (conocimiento de los estudiantes) y los significados institucionales (conocimiento desde el punto de vista de la institución educativa). El conocimiento especializado en la faceta cognitiva garantiza que el profesor pueda comprender las formas de pensar de los estudiantes y reconocer los significados personales, concepciones erróneas, conflictos y errores que surgen en el proceso de resolución de problemas. El aspecto interaccional se refiere al

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas e interacciones que se puede establecer en el aula.

Adicionalmente, el modelo CCDM propone que el profesor debe ser *competente* para abordar los problemas didácticos básicos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Dicho modelo considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica*. Para desarrollar esta última, el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de estudio y, por otra, necesita conocimientos para juzgar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones (Godino *et al*., 2017). Dar respuestas apropiadas a situaciones reales en el aula de matemáticas, supone, en particular, la capacidad para interpretar y evaluar las soluciones de alumnos a tareas matemáticas, identificar elementos matemáticos esenciales en las prácticas matemáticas (competencia de análisis cognitivo) y tomar decisiones adecuadas que expriman el potencial matemático de las estrategias erróneas o poco habituales (competencia de gestión de configuraciones didácticas).

Implicaciones del razonamiento proporcional en el trabajo probabilístico

El razonamiento proporcional ha sido descrito como la piedra angular de las matemáticas superiores y la cúspide del desarrollo de conceptos matemáticos elementales en aritmética, números y medición (Lesh *et al*., 1988). La importancia del razonamiento proporcional va más allá del aula de matemáticas; muchos temas dentro del currículo de ciencias o de economía requieren la capacidad de razonar proporcionalmente. Razón y proporción aparecen involucradas en la resolución de problemas de matemáticas en contextos que involucran escalas o geometría de formas planas, cálculo de probabilidades, porcentajes, tasa, trigonometría, medidas y álgebra. En la resolución de los problemas característicos de dichos contextos de aplicación intervienen prácticas, objetos y procesos específicos de tales campos (Lamon, 2007; Tourniaire y Pulos, 1985).

El *razonamiento proporcional,* entendido como la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades (Lamon, 2007), es un objetivo presente desde el currículo de Educación Primaria, que integra tanto las diversas interpretaciones del número racional (razón, operador, parte-todo, medida y cociente) como las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento *up and down*, *unitizing*). Es una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos. De la misma forma, dicho razonamiento es considerado como un componente básico del razonamiento probabilístico, pues forma parte integrante de los componentes de análisis del espacio muestral, de la cuantificación proporcional de las probabilidades y de la comprensión y uso de las correlaciones (Bryant y Nunes, 2012). Este hecho implica que el éxito o fracaso ante el cálculo de probabilidades dependerá, estrechamente, de la identificación de la naturaleza proporcional de las probabilidades.

Numerosas investigaciones revelan que, tanto los profesores en formación inicial como en servicio, presentan dificultades para comprender y enseñar algunos de los componentes que constituyen el razonamiento proporcional (Ben-Chaim *et*

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

al., 2012; Berk *et al*., 2009; Buforn *et al*., 2018), así como para interpretar las respuestas de alumnos cuando resuelven tareas que involucran la proporcionalidad (Fernández *et al*., 2011, 2012).

En contextos estadísticos y probabilísticos, se ha observado que la falta de razonamiento proporcional en la resolución de problemas elementales de comparación de probabilidades se encuentra no solo en estudiantes, sino también en futuros profesores de Educación Primaria (Batanero *et al*., 2015; Mohamed, 2012; Vásquez y Alsina, 2015b).

Mohamed (2012) propone, a futuros profesores de Educación Primaria, trabajar en pequeños grupos para, primero resolver, y después evaluar y explicar el razonamiento de alumnos ficticios a cuatro problemas de probabilidad. Sus resultados muestran que, aunque la mayoría de los grupos identifican adecuadamente las respuestas correctas e incorrectas, no siempre logran explicar las causas de error y, en ocasiones, la solución que proponen es inconsistente con la evaluación de la respuesta del alumno ficticio. En la misma línea, y con objeto de evaluar el conocimiento del contenido y a los estudiantes sobre probabilidad, Batanero *et al*. (2015) proponen a futuros profesores identificar las respuestas correctas e incorrectas, y explicar las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a los alumnos (ficticios) a dar una respuesta errónea. Si bien inicialmente los futuros profesores habían mostrado un escaso razonamiento probabilístico, en su mayoría ofrecieron explicaciones válidas a las respuestas incorrectas de los alumnos.

Vásquez y Alsina (2015a) diseñan un cuestionario para evaluar el conocimiento didáctico-matemático de maestros en ejercicio para la enseñanza de la probabilidad. La evaluación del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (facetas cognitiva y afectiva) se logra mediante la identificación de las respuestas correctas y la descripción de las posibles dificultades que han llevado a los alumnos a ofrecer las respuestas incorrectas. Por otro lado, la evaluación del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (facetas interaccional y mediacional) se plantea por medio de la reflexión sobre las estrategias que utilizaría el profesor para que los alumnos (ficticios) que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen. Los resultados obtenidos en la aplicación piloto muestran un nivel insuficiente de conocimiento, especialmente en aquellas circunstancias que involucran la comprensión de la noción de suceso seguro, el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales, y la comprensión de la independencia de sucesos.

En este trabajo nos interesa evaluar en qué medida los futuros profesores de Educación Primaria identifican rasgos de razonamiento proporcional en las respuestas dadas por alumnos (ficticios) de Educación Primaria a problemas que involucran la comparación de probabilidades. La información obtenida nos permitirá tomar decisiones para diseñar e implementar acciones formativas con futuros profesores de Educación Primaria con objeto de desarrollar, en ellos, aspectos epistémicos, cognitivos e instruccionales del conocimiento didáctico-matemático sobre las implicaciones del razonamiento proporcional en el contexto probabilístico.

Método

Con objeto de evaluar los conocimientos y competencias de futuros profesores de Educación Primaria para interpretar

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

las respuestas de estudiantes a tareas de comparación de probabilidades y proponer estrategias que ayuden a los alumnos a superar las dificultades, se ha llevado a cabo un análisis de contenido y descriptivo de las respuestas dadas por los participantes a la tarea incluida en la Figura 1. Parte del grupo investigador, de manera independiente, realizó el análisis descriptivo de los informes de los futuros profesores, discutió con el resto las posibles discrepancias y consensuó las categorías resultantes del análisis de manera colaborativa, en un proceso cíclico e inductivo, propio de la investigación cualitativa. Igualmente, las investigadoras discutieron y acordaron los criterios de puntuación para valorar la pertinencia de las respuestas a cada una de las consignas solicitadas a los participantes, para poder realizar una valoración global cuantitativa del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores con apoyo en herramientas estadísticas.

La investigación se puede clasificar como aplicada ya que sus resultados pueden utilizarse para la mejora de la enseñanza (Bisquerra & Alzina, 2004).

Contexto

La muestra estuvo formada por 116 futuros profesores de Educación Primaria (en adelante, FPP), estudiantes del tercer curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Almería durante el curso académico 2020/2021. La intervención se llevó a cabo una vez finalizado el proceso de formación en torno a los principales conceptos, propiedades y procedimientos del bloque de contenidos de Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Éste aborda los fundamentos de la didáctica de las matemáticas, concretada en aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades) e instruccionales (diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos).

La tarea fue propuesta por dos de las investigadoras, una vez finalizado el periodo lectivo, para que esta fuese desarrollada de forma individual fuera del aula. Los participantes habían realizado actividades similares a las de los alumnos ficticios en la tarea, pero no habían recibido una formación específica sobre razonamiento proporcional en el contexto probabilístico. La actividad se propuso como voluntaria, dentro del proceso de formación de los participantes y su realización podía suponer aumentar hasta en un punto la calificación final la prueba correspondiente a los contenidos de Estadística y Probabilidad.

A partir de la tarea, se espera que los FPP reflexionen, de forma justificada, si la respuesta es correcta e identifiquen el origen de los errores en las respuestas incorrectas. Asimismo, se espera que reflexionen sobre la presencia o no de razonamiento proporcional en estas y que describan formas de actuación ante las dificultades de los alumnos. Nos interesa analizar en qué medida tienen en cuenta el razonamiento proporcional en la propuesta de soluciones en aquellas respuestas de los alumnos en las que el error es debido a un razonamiento proporcional inadecuado.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

Ítem. *En la caja A se han metido dos bolas blancas y dos bolas negras. En la caja B se han metido 4 bolas blancas y 4 bolas negras. ¿En qué caja es mayor la posibilidad de sacar una bola negra?*
Alba: "En la caja B porque tiene 2 bolas negras más que la caja A"
Daniel: "La misma, porque en la caja B hay 2 bolas más de blancas, pero también hay dos bolas más de negras"
Lucía: "La misma, porque en ambas las bolas blancas son la mitad de las bolas negras"
Salva: "La misma porque en la caja B se han multiplicado por 2 el número de bolas blancas y negras respecto de las de A"
A partir de las respuestas dadas, se pide:

a) Indicar qué alumnos han dado una solución y justificación correcta y por qué.
b) Indicar qué alumnos han dado una respuesta incorrecta señalando las posibles intuiciones o estrategias que han motivado el error, así como en qué casos se aprecia algún grado de razonamiento proporcional.
c) Para cada respuesta incorrecta, describir cómo explicarían a los alumnos el error que han cometido y cómo intentarían resolver las dificultades que se han encontrado los alumnos al resolver la tarea.

Figura 1. *Formulación de la tarea propuesta*. *Nota*: Fuente propia de la investigación.

Análisis a priori

Para resolver el problema es posible determinar las probabilidades de obtener bola negra en las dos urnas, aplicando la regla de Laplace, y a continuación compararlas. Así, dado que en la caja A hay dos bolas blancas y dos bolas negras, se tiene que la probabilidad de sacar una bola negra en la caja A es de 2/4 y en la caja B es 4/8. El estudio comparativo de ambas fracciones nos permite concluir que la probabilidad de sacar bola negra en ambas cajas es la misma, ya que existe la misma razón de casos favorables y casos posibles (1:2). Alternativamente, se puede dar respuesta estableciendo relaciones "dentro" de una de las cajas y, posteriormente, aplicarlo a la otra (estrategia de correspondencia). Así, se puede observar que en la caja A hay el mismo número de bolas blancas y negras, relación que también es verificada en la urna B. De forma similar, se puede establecer la relación "entre" las cajas, precisando que en la caja B hay doble de bolas negras (o bolas blancas) que en la caja A. Igualmente, se podría llegar a comparar la razón entre casos favorables y desfavorables en cada caja $\frac{n_A}{b_A} = \frac{n_B}{b_B}$.

Según las resoluciones mostradas, se tiene que la respuesta de Alba es incorrecta, en tanto solo compara los casos favorables, lo que la lleva a decidir que la probabilidad de sacar bola negra es mayor en la caja B. Por su parte, Daniel compara de forma aditiva los casos desfavorables (bolas blancas) y los casos favorables (bolas negras) de ambas cajas, y concluye que la probabilidad de sacar bola negra en ambas cajas es la misma, dado que la diferencia entre casos desfavorables de ambas cajas y casos favorables de ambas cajas es la misma, dos. Este argumento no es correcto, dado que solo conduce a una respuesta correcta en el caso en que el número de casos favorables coincida con el número de casos desfavorables.

En el caso de Lucía, es cierto que si el número de casos desfavorables es el número de casos favorables multiplicado por un escalar (en nuestro caso 2) la probabilidad se mantiene constante. Sin embargo, no es cierto que en ambas las bolas blancas son la mitad de las bolas negras, sino que en ambas las bolas blancas (casos desfavorables) son la mitad del total de bolas (casos posibles) o que en ambas las bolas negras (casos favorables) son la mitad del total de bolas (casos posibles),

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

condición que también garantiza la igualdad de la probabilidad. En este caso, parece que Lucía confunde "casos desfavorables" con "casos posibles". Observamos que Lucía establece una razón en una de las cajas y la compara multiplicativamente con la misma razón en la otra, que corresponde a un razonamiento proporcional, pero no lo hace entre las magnitudes adecuadas, lo que permitiría argumentar correctamente la solución.

Para justificar que la probabilidad de sacar bola negra en ambas cajas es la misma, Salva emplea un razonamiento proporcional, ya que establece una razón entre los casos favorables de ambas cajas y otra razón entre los casos desfavorables de ambas cajas que, después, se comparan multiplicativamente. La probabilidad, como razón entre el número de casos favorables y posibles se mantiene constante, si el número de casos favorables y desfavorables se multiplica por un escalar.

Después de haber interpretado las respuestas que son correctas, las incorrectas, atendiendo a las intuiciones o estrategias que las han motivado y la presencia de razonamiento proporcional o no en estas, se pide a los FPP que describan cómo explicarían a los alumnos el error que han cometido, y cómo intentarían resolver las dificultades que los provocaron. En el caso de Alba, dado que solo compara los casos favorables, sería conveniente hacer ver el papel de los casos desfavorables en la probabilidad. Para ello debe reforzarse la noción de fracción, el papel del todo y la parte, observando que el todo en la aplicación de la regla de Laplace viene dado por dos partes disjuntas (favorable y desfavorable). Puede ser interesante modificar el número de bolas blancas para que observe el efecto en la probabilidad. En el caso de Lucía, sería necesario conocer, si el error se ha debido a una dificultad de expresión o si ha sido consecuencia de confundir casos desfavorables y casos posibles.

Daniel usa una estrategia aditiva, que le lleva a concluir que la probabilidad de sacar bola negra en ambas cajas es la misma, porque la diferencia entre casos desfavorables de ambas cajas y casos favorables de ambas cajas es la misma, dos. Dado que este argumento solo conduce a una respuesta correcta en el caso en que el número de casos favorables coincida con el número de casos desfavorables, podríamos modificar el número de bolas en ambas cajas para que esta relación no se cumpliera. Se necesita reforzar la relación de proporcionalidad en la base de la comparación de probabilidades. Puede ser interesante emplear el registro tabular en el que aparecen cantidades de magnitudes proporcionales (véase por ejemplo la Tabla 1).

Tabla 1

Simulación del cálculo de probabilidad de obtener bola negra de una urna con bolas blancas y negras variando el número de estas

Bolas negras	1	2	3	4	…	1	2	3	4	…
Bolas blancas	1	2	3	4	…	2	4	6	8	…
Bolas en la caja	2	4	6	8	…	3	6	9	12	…
Probabilidad	1/2	2/4	3/6	4/8	…	1/3	2/6	3/9	4/12	…

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

Resultados

En esta sección presentamos los resultados del análisis de los informes elaborados por los FPP. En primer lugar, se analizan las respuestas a cada una de las consignas, presentando las categorías de respuestas encontradas , finalmente, una valoración global de estas.

Valoración del grado de corrección de las respuestas de los alumnos

El análisis de los resultados sobre la corrección de las respuestas pone de manifiesto las dificultades que han presentado los FPP para interpretar el razonamiento empleado por los alumnos. Recordemos que la única respuesta correcta era la dada por Salva. Esta fue identificada por el 93,67% de los participantes, quienes señalan, además, la pertinencia de la justificación realizada por este. Destacamos el hecho de que el 86,21% y el 56,03% de los participantes consideran correctas las respuestas de Daniel y Lucía, respectivamente. La respuesta de Daniel se ha valorado como parcialmente correcta siempre y cuando se haya justificado que su validez se limita a ciertos casos particulares. Asimismo, dos FPP señalan todas las respuestas como correctas (estos son los únicos que implícitamente consideraron correcta la respuesta de Alba) y otros tres dijeron que "no todas" las respuestas son correctas sin ofrecer más detalle.

Identificación de las respuestas consideradas correctas y justificación

A continuación, se describen y ejemplifican las categorías de justificaciones empleadas por los FPP para valorar como correctas las respuestas de Daniel, Lucía y Salva (dado que todos los estudiantes que valoraron la respuesta de Alba lo hicieron como incorrecta).

J1. *Justificación basada en la igualdad de probabilidad.* Se consideran justificaciones no pertinentes en las que los FPP determinan la probabilidad y aceptan como correcta sin valorar los argumentos que emplean. Las justificaciones se apoyan en que la probabilidad de extraer bola negra es la misma en ambos casos (calculada de manera previa) para valorar como adecuadas las soluciones dadas por los tres alumnos ficticios ("… existe un 50% que ocurra cada suceso. Por lo que las respuestas de Daniel, Lucía y Salva son correctas", E7).

J2. *Justificación basada en la igualdad entre casos favorables y desfavorables.* Se consideran valoraciones poco pertinentes en las que los FPP justifican el grado de corrección de la solución de los alumnos en términos de la igualdad entre los casos favorables y desfavorables. Por ejemplo, E31 indica:

> Daniel y Salva tienen razón porque en las dos cajas hay las mismas bolas de color negro y las mismas bolas de color blanco, si en alguna urna (A o B) hubiese más bolas negras o más bolas blancas, ya no sería equitativo y en una urna u otra habría más posibilidad de sacar una bola negra.

J3. *Justificación basada en la comparación aditiva*. Corresponde a valoraciones no pertinentes en las que los FPP consideran adecuada la comparación aditiva entre casos favorables y desfavorables ("Todos [Daniel, Lucía y Salva] están teniendo en cuenta que en la caja B se añade la misma cantidad de bolas blancas como de bolas negras", E55).

J4. *Justificación fundamentada en la relación de proporcionalidad*. En esta categoría encontramos respuestas en las que el futuro maestro justifica el grado de

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

corrección de la solución de los alumnos en función de la relación de proporcionalidad o de un uso de razonamiento proporcional. A modo de ejemplo, E11 valora de forma pertinente la adecuación de la respuesta de Salva en términos de la proporcionalidad:

> E11. Ha justificado que al igual que se multiplican por dos el número de bolas blancas, también se multiplica por dos el número de bolas negras. En la urna B, hay el doble de cada una de las bolas de color en comparación con la urna A. Es por eso que hay un aumento proporcional en la cantidad de bolas de cada color, en este caso del doble.

J5. *Justificación en términos de la relación multiplicativa*. En esta categoría se encuentran las valoraciones de algunos participantes al grado de corrección de la respuesta de Salva. Se establece la relación multiplicativa entre el número de casos favorables y desfavorables entre ambas urnas sin hacer mención explícita a la relación de proporcionalidad. Por ejemplo,

> E61. En cuanto a Salva, llega a la misma conclusión de que la probabilidad es la misma sin necesidad de realizar ninguna operación, razonando que la única diferencia entre las dos cajas es que en la caja B se duplican todas las bolas (2 bolas blancas x 2 = 4; 2 bolas negras x 2 = 4) por lo que existe la misma posibilidad.

Destacamos el hecho de que todas las respuestas encontradas en esta categoría se han considerado no del todo pertinentes, dado que no llegan a explicar por qué la relación multiplicativa garantiza la misma probabilidad.

J6. *Justificación basada en un caso particular.* Se consideran aquellas descripciones que hacen referencia a que la validez de la respuesta de Daniel o Salva se limita a la composición específica de las cajas, como, por ejemplo, la respuesta dada por E92:

> E92. Este argumento [el de Daniel] sirve solo cuando tengo las mismas bolas de cada color. Con otra caja en la que no hubiera mitad y mitad de cada color ya no sería la misma probabilidad.

J7. *Justificaciones no concluyentes.* Se consideran aquellas respuestas basadas en observaciones generales que no permiten determinar la valoración del grado de corrección asignado a la respuesta del alumno. A modo de ejemplo E42 destaca respecto a las soluciones de Daniel y Salva que “Los dos métodos que han utilizado para resolverlos son correctos. Cada uno lo ha interpretado de una manera diferente”.

La Tabla 2 resume las distintas categorías y frecuencias en las valoraciones que elaboraron los FPP para justificar como correctas las respuestas de los alumnos de primaria. Se observa que algunos FPP no lograron valorar por qué consideran correcta la respuesta de los alumnos, dejando entrever la dificultad que tienen para analizar y comunicar sus percepciones sobre las prácticas discursivas de los alumnos. De los que lo hicieron, en su mayoría justificaron la corrección de las soluciones de los alumnos con base en que la probabilidad es la misma. Esto muestra que los FPP no buscan detrás de las justificaciones aportadas por los niños de primaria aquellos argumentos que sostienen dicho resultado y que “confían” en aquellas conclusiones que corresponden a una solución previa. Es también significativo que el 10% considere que emplear una comparación aditiva es adecuado para resolver el problema o que el 16% de los participantes interprete razonamiento

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

proporcional al valorar como correcta la respuesta de Daniel.

Identificación de las estrategias erróneas en las respuestas de alumnos

Posteriormente, los FPP debían identificar las posibles intuiciones o estrategias que habían llevado a los alumnos a errar su respuesta. A continuación, se detallan y ejemplifican cada una de las categorías encontradas de manera mayoritaria en las descripciones de las estrategias incorrectas empleadas por los alumnos, en este caso, Alba y Lucía.

EI1. *Razonamiento proporcional ausente o incompleto*. Descripciones referidas a que no se emplea el razonamiento proporcional ("Alba es la única que se equivoca en su respuesta … De acuerdo con su respuesta no identifico ningún grado de razonamiento proporcional —es exactamente lo que le ha fallado—", E104) o que se hace un razonamiento proporcional inadecuado, si bien no se profundiza en el porqué de ese mal uso ("El error principal [de Lucía] se refiere a emplear un razonamiento proporcional cuando no era adecuado llevarlo a cabo", E24).

EI2. *Razonamiento aditivo*. Algunos de los FPP consideran que la respuesta de Alba no es correcta porque realiza una comparación aditiva. Por ejemplo, E103 señala que "Alba se equivoca, ya que se añade el mismo número de bolas para ambos colores y, por tanto, la probabilidad de obtener una bola negra sería la misma en ambas cajas."

EI3. *Ausencia de un cálculo previo de probabilidades*. En esta categoría se encuentran las explicaciones similares a la dada por E4 ("En el caso de Alba, creo que es porque no ha calculado previamente cual es la probabilidad de cada caja") o E94 ("El hecho de resolver el problema sin aplicar la probabilidad le ha llevado a dar una respuesta incorrecta"), donde se considera que el error procede de no haber determinado de forma previa las probabilidades de obtener bola negra en ambas cajas.

EI4. *Estrategia univariada.* En esta categoría encontramos las observaciones de los FPP que describen estrategias inadecuadas en la respuesta de Alba, con base en que la alumna compara solo los casos favorables ("Alba ha optado por fijarse exclusivamente en las bolas negras", E8), olvida los casos

Tabla 2
Categorías y frecuencias en las justificaciones dadas por los FPP a las respuestas consideradas correctas.

Categorías	Daniel	Lucía	Salva	Total
J1. Justificación basada en la igualdad de probabilidad	37	19	33	**89**
J2. Igualdad entre casos favorables y desfavorables	8	2	7	**17**
J3. Comparación aditiva	10	1	1	**12**
J4. Proporcionalidad	16	2	26	**44**
J5. Relación multiplicativa	0	0	10	**10**
J6. Caso particular	2	0	1	**3**
J7. No concluyente	11	2	9	**22**
No valora	16	5	16	**37**
Total de FPP que consideran correcta la respuesta	**100**	**31**	**103**	

Nota: Fuente propia de la investigación.

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

desfavorables ("Alba comete el error de no contar las bolas blancas de la caja B", E7) o contempla únicamente los casos posibles en ambas cajas ("Alba se ha dejado llevar porque hay un número menor de bolas dentro de la caja A, ha pensado que al ver una cantidad tan grande en la caja B ha imaginado que la probabilidad es menor", E50).

EI5. *Identificación incorrecta de casos favorables y casos posibles* o la relación entre estos. Se contempla en esta categoría aquellas respuestas que señalan que el error de Lucía está motivado por una confusión de casos favorables y casos posibles en cada caja ("Ha confundido las bolas y los colores. Las de un color son la mitad de todas las bolas" E42), o de la relación entre los casos favorables por la relación entre los casos posibles de ambas cajas ("Ha confundido la relación entre las bolas con la relación entre las cajas", E81).

EI6. *Error de interpretación*. En este caso, se considera que la respuesta es incorrecta debido a una falta de comprensión del enunciado del ejercicio dejando de lado la identificación de los errores asociados al contenido matemático que se está trabajando. Este tipo de observaciones se encuentran fundamentalmente en las explicaciones de los FPP al error tras la respuesta de Lucía ("Se debe a la falta de comprensión del ejercicio y a la interpretación de los datos", E33). En menor medida, también se encuentran en la explicación al error cometido por Alba, considerando que una lectura o interpretación incorrecta del enunciado lleva a Alba a olvidar que también se añaden bolas negras a la caja B en relación a la caja A.

EI7. *Error de expresión*. Los FPP resaltan que el alumno sí ha abordado de manera correcta el problema, pero que su argumento no refleja realmente aquello que pretendía decir. Por ejemplo, E34 establece que Lucía pretendía hacer referencia a la relación entre los casos posibles de ambas cajas, o bien a la relación entre los casos favorables y los casos posibles en ambas cajas.

> E34. Esta chica [Lucía] ha tenido un fallo de explicación, queriendo haberse referido con "las bolas blancas son la mitad de las bolas negras", a que en la caja una mitad de las bolas siempre son blancas y la otra mitad de las bolas siempre son negras.

EI8. *No concluyentes.* Se consideran aquellas observaciones que no permiten determinar claramente la estrategia incorrecta identificada tras la respuesta del alumno. Por ejemplo, E29 basa su conclusión en la propia respuesta de Alba indicando que "No es correcta porque afirma que en B es más probable obtener 'negra', pero la cantidad de bolas negras y de bolas blancas es la misma en ambas urnas".

La Tabla 3 recoge la distribución de frecuencias en cada una de las distintas categorías descritas relacionadas con las respuestas de las alumnas ficticias Alba y Lucía. Nótese que salvo dos participantes que implícitamente consideraron correcta la respuesta de Alba, los demás la identificaron como incorrecta, aunque no todos indicaron las intuiciones o estrategias que han provocado dicho error. Observamos que la mayoría de los FPP (68,97%) consideran que el error de Alba procede de una estrategia univariada; sin embargo, de estos, solamente cuatro consideran que ha comparado de manera absoluta el número total de bolas en ambas cajas mientras los 76 restantes, hicieron una descripción pertinente de la estrategia errónea empleada. En el caso de Lucía, tres cuartas partes de los participantes identificaron dicha respuesta como incorrecta; pero solo 57 reflexionaron sobre el motivo

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

Tabla 3

Categorías y frecuencias en la descripción de estrategias erróneas de Alba y Lucía

Categorías	Alba	Lucía
EI1. Razonamiento proporcional ausente o incompleto	7	10
EI2. Razonamiento aditivo	11	--
EI3. Ausencia cálculo previo probabilidad	4	--
EI4. Estrategia univariada	80	
EI5. Identificación incorrecta de casos favorables y desfavorables	--	7
EI6. Error de interpretación	4	24
EI7. Error de expresión	--	16
EI8. No concluyente	5	14
No contesta	3	14
Total	**114**	**85**

Nota: Fuente propia de la investigación.

de dicho error. Además, la mayor parte de las valoraciones hacen referencia a una falta de comprensión en la lectura del enunciado o por no entender en sí la actividad a resolver (28,24%).

En relación con la respuesta de Daniel (parcialmente correcta en tanto su validez se limita a ciertos casos particulares), de los 16 FPP que no consideraron correcta su respuesta, dos dieron respuestas no concluyentes ("Ha usado más la lógica que el razonamiento y la comprensión", E66), uno consideró que cometía el mismo error que Lucía, y otros siete indicaron que, pese a que la solución es correcta ("la misma probabilidad en ambas cajas") el argumento de Daniel solo es válido en casos particulares ("si el número de bolas blancas es igual al número de bolas negras", E22).

Reconocimiento del razonamiento proporcional

Además de identificar las intuiciones o estrategias incorrectas, los FPP debían reflexionar sobre la existencia de razonamiento proporcional en las respuestas incorrectas de los alumnos. Destacamos que más de la mitad de los participantes (54,31%) no dieron respuesta a esta pregunta. El análisis de las respuestas de los FPP a esta pregunta, junto con las explicaciones aportadas en la anterior para justificar el grado de corrección de las respuestas, nos ha permitido identificar qué consideran los participantes como rasgos de razonamiento proporcional en las respuestas dadas por los alumnos:

RP1. *Propiedad en acto.* El razonamiento proporcional viene dado por medio de la propiedad en acto, "a más …, más …". Son frecuentes en aquellos que incorrectamente identifican razonamiento proporcional en la respuesta de Alba. Por ejemplo, E65 indica que "Hay razonamiento proporcional por su parte, al haber más bolas negras en esa caja hay más probabilidades de sacarla".

RP2. *Relación aditiva.* El razonamiento proporcional se interpreta como una relación aditiva ($y = x + c$) entre cantidades de magnitudes (casos favorables, desfavorables y posibles en o entre cajas). Estas descripciones aparecen en relación a la respuesta de Alba, como se observa a continuación:

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

> E110. En la respuesta de Alba podemos ver cierto razonamiento proporcional, ya que lo único que ha tenido en cuenta ha sido el incremento de bolas en el color negro. … Ese sería su error, haber pensado solamente de forma proporcional en un solo color.

RP3. *Comparación multiplicativa.* Se considera que hay razonamiento proporcional cuando se establece una *comparación multiplicativa* (doble, mitad) entre cantidades de magnitudes. Por ejemplo:

> E87. Lucía, sí que muestra cierto grado de razonamiento proporcional, aunque confuso, ya que esta es capaz de decir que existe una relación entre las bolas blancas y las bolas negras de ambas cajas, siendo las blancas la mitad de las negras según ella, aunque esto realmente no es cierto.

La relación multiplicativa se trata en unas ocasiones se comparar entre los casos favorables y desfavorables *dentro de cada caja* ("Este razonamiento [referido a Lucía] puede ser proporcional ya que compara que las bolas blancas son siempre la mitad de las bolas negras", E49) y otras veces entre los casos favorables y desfavorables *entre las cajas* ("Ha aumentado la cantidad de bolas negras, pero la de las blancas también y en la misma proporción", E11).

RP4. *Equivalencia de fracciones.* Se asocia el razonamiento proporcional a la equivalencia entre fracciones o en el establecimiento de la proporción. Por ejemplo, E91 considera que "quizás, lo que quería decir [Lucía] es que la proporción entre la caja A y B se mantenía, por lo que podemos intuir cierto grado de razonamiento de proporcionalidad".

De todos los FPP que consideraron incorrecta la respuesta de Alba, solamente trece indicaron cierto grado de razonamiento proporcional, once de tipo cualitativo "a más…, más …" (RP1) y dos de tipo aditivo (RP2). En relación con la respuesta de Lucía, once indicaron la existencia de razonamiento proporcional, siete como relación multiplicativa (RP3) y cuatro como reconocimiento de la equivalencia de fracciones (RP4).

El análisis global de las referencias que hacen los FPP al razonamiento proporcional empleado por los alumnos de Educación Primaria al resolver la tarea de comparación de probabilidades, tanto cuando lo mencionan para valorarla como correcta como cuando buscan ese tipo de razonamiento dentro de las respuestas incorrectas, nos permite concluir que:

- Aproximadamente el 40% muestran un conocimiento sesgado del razonamiento proporcional. En concreto, el 23,91% lo interpretan por medio de la propiedad "a más, …, más" y el 13,04% consideran el razonamiento proporcional como una relación aditiva. Por ejemplo, se observa este error de significado en aquellos FPP que consideran razonamiento proporcional en la respuesta de Daniel ("pues se suma o se quita de manera igualitaria en las dos cajas", E18) o pensar que la respuesta de Salva es incorrecta debido a un "razonamiento proporcional incorrecto", que ellos interpretaban como relación aditiva.
- De aquellos que muestran un conocimiento adecuado del razonamiento proporcional, un 36,96% consideran que hay razonamiento proporcional cuando se establece una *comparación multiplicativa* entre cantidades,

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

mientras que para el 26,09% el razonamiento proporcional se caracteriza por reconocer la *equivalencia de fracciones o* establecer la proporción. Por ejemplo, E38 sugiere:

> En cuanto al razonamiento proporcional, identifico 2 casos, el de Daniel y Salva, puesto que ambos han tenido en cuenta la equivalencia de fracciones. De este modo, han observado que en la caja A hay 2/4 blancas y 2/4 negras, mientras que en la B hay 4/8 blancas y 4/8 negras, lo que significa que la probabilidad en ambos casos es la misma.

Propuestas de intervención para la gestión de errores

La última consigna se propuso con la intención de analizar el conocimiento didáctico-matemático (faceta interaccional) que poseen los FPP cuando se enfrentan a situaciones en las que tienen que realizar propuestas de intervención para que el alumno entienda el porqué de su error y cómo podría solventarlo. Señalamos el hecho de que aproximadamente el 40% de los participantes plantean estrategias genéricas con las que buscan solventar las dificultades de todos los alumnos como grupo. Estos resultados son altamente preocupantes teniendo en cuenta que los participantes están cursando el penúltimo curso del Grado de Educación Primaria. Las propuestas de estrategias de intervención son:

S1. *Uso de materiales manipulativos* o *simuladores*. Sugieren la pertinencia del uso de materiales que permitan simular el experimento. Por ejemplo, E1 incida "Llevaría a clase dos cajas y las bolas y las introduciría tal y como lo indica el enunciado."

S2. *Empleo de nuevos ejemplos* o *contraejemplos*. Se considera que proponer más ejemplos o usar nuevas situaciones que permita a los alumnos comprender por qué su estrategia no siempre funciona. Por ejemplo, E44 pondría "[a Lucía] a modo de ejemplo dos cajas, en una habrá 6 bolas negras y en otra 3 bolas blancas. Con esto, ella podrá ver que su respuesta no concuerda con la afirmación que nos proporciona".

S3. *Representaciones icónicas o gráficas*. Se considera que el uso de representaciones puede facilitar la identificación de los casos favorables y posibles ("mostrar el apartado de forma gráfica solucionaría el problema", E15). Asimismo, destacan que la utilización de representaciones icónicas ("Haría el dibujo de ambas cajas en la pizarra para que vieran que, efectivamente, el número de bolas de ambos colores es el mismo en los dos casos", E16) o el diagrama en árbol solventaría los errores ("A ambas [Alba, Lucía] le explicaría el ejercicio con un [diagrama de] árbol, porque considero que es la forma más fácil de entenderlo", E27).

S4. *Nueva lectura del enunciado.* Señalan como fuente de los errores la falta de comprensión o interpretación del enunciado (EI6), proponiendo realizar una nueva lectura del enunciado reflexionando sobre este. Asimismo, recomiendan que el docente realice una explicación más detallada del enunciado del problema, tal y como señala E89, "Les explicaría el problema de manera más detallada y en profundidad".

S5. *Uso de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades.* Algunos destacan que un buen conocimiento de la regla de Laplace supondría la eliminación de este tipo de errores, pues permite el cálculo explícito de las probabilidades ("Le explicaría la regla de Laplace para que le resulte más fácil en sus próximos ejercicios realizar la comparación con otras probabilidades", E88).

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

S6. *Profundizar sobre el papel que tienen los casos favorables y desfavorables.* Se propone identificar los casos favorables (bolas negras) y los casos desfavorables (bolas blancas) en la composición de las cajas para corregir comparaciones aditivas que llevan a error (en el caso de Alba) o bien para observar que la igualdad entre casos favorables y desfavorables garantiza la igualdad de probabilidad en ambas cajas. Por ejemplo,

> E56. Tenemos que explicarle [a Alba] que igual que se ha aumentado el número de bolas negras de la caja B respecto a la caja A, también tenemos que fijarnos en las blancas y ver que también han aumentado el número de bolas blancas de la caja B respecto a la A, con lo cual hay la misma cantidad de bolas blancas y negras en cada caja y con ello la misma probabilidad de que salga un color u otro.

S7. *Explicar la relación de proporcionalidad en el cálculo y comparación de probabilidades.* Al considerar que el error cometido por los alumnos tiene su origen en un conocimiento limitado de la proporcionalidad sugieren recordar de manera previa este concepto. Asimismo, plantean la necesidad de diferenciar entre aumento aditivo y proporcional, precisar la relación multiplicativa significativa y conectar esta relación con la proporción de casos favorables y desfavorables y el tema de fracciones. Por ejemplo,

> E41. Dado que la mayoría de los errores han sido provocados por una falta de razonamiento proporcional, pienso que la probabilidad y los ejercicios como este deberían trabajarse justo después de haber dado el tema de las fracciones. Así, los niños tienen más recientes los conceptos de fracción, saben lo que representan y no se han olvidado del concepto de fracciones equivalentes.

En la Tabla 4 se muestra la distribución de frecuencias de las distintas categorías descritas, donde debemos mencionar que hay FPP que indican más de una estrategia. Se observa un gran número de propuestas de carácter genérico en cuyo caso prevalece el uso de materiales manipulativos y simuladores, aunque también se sugiere el trabajo colaborativo en ambiente de juegos o comparar con la solución del profesor o de otros compañeros para reflexionar sobre la validez

Tabla 4
Tipos de estrategias propuestas por los FPP para resolver las dificultades

Estrategia propuesta	Genérico	Alba	Lucía	Total
S1. Uso de materiales manipulativos o simuladores	32	10	8	**50**
S2. Empleo de ejemplos o contraejemplos	12	4	2	**18**
S3. Representaciones icónicas o gráficas	19	6	2	**27**
S4. Nueva lectura del enunciado	11	3	10	**24**
S5. Uso de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades	14	7	4	**25**
S6. Profundizar sobre el papel que tienen los casos favorables y desfavorables	5	31	7	**43**
S7. Explicar la relación de proporcionalidad en el cálculo y comparación de probabilidades	4	7	7	**18**
Total	**97**	**68**	**40**	**205**

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

de su respuesta. Pensamos que la extensa mención al uso de materiales manipulativos y simuladores guarda una estrecha relación con la formación sobre este tipo de recursos que han recibido los participantes de manera previa a la intervención. En el caso particular de Alba, se observa que la mayoría de las propuestas se focalizan en la comprensión del papel que juega en el cálculo de probabilidades los casos favorables y desfavorables, mientras que en el caso de Lucía se centran en realizar una nueva lectura del enunciado con objeto de solventar los problemas asociados a la comprensión del problema. De igual modo, se percibe un uso escaso de nuevos ejemplos o contraejemplos que hagan reflexionar al alumno sobre las diferentes situaciones que se van presentando para que vaya identificando, por él mismo, las razones por las cuales su respuesta no podía ser considerada como correcta.

Evaluación global del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores

Hemos considerado oportuno valorar positivamente las respuestas parcialmente correctas o incompletas, por lo que la puntuación otorgada a los ítems ha sido:

- 0 puntos; si se valora de forma incorrecta el grado de corrección de la solución, si no se justifica o si la justificación es incorrecta o no concluyente.
- 1 punto; si se valora correctamente el grado de corrección de la solución, pero la justificación no es del todo pertinente.
- 2 puntos; si la valoración dada es correcta y está justificada de forma pertinente.

En el caso de Daniel, se considera parcialmente correcta la respuesta dada por un participante que afirma que la solución dada por este niño es correcta, especificando que la estrategia empleada solo es válida en algunos casos particulares.

En segundo lugar, la identificación del razonamiento proporcional en las respuestas incorrectas de los alumnos se ha evaluado como:

- 0 puntos; si se considera razonamiento proporcional en una respuesta cuando no lo hay, o se señala que sí hay razonamiento proporcional, pero no se justifica.
- 1 punto; cuando se identifica el razonamiento proporcional en la respuesta de Lucía, pero no se describe adecuadamente la relación de proporcionalidad establecida.
- 2 puntos; si se identifica razonamiento proporcional en la respuesta de Lucía y se describe correctamente la relación de proporcionalidad establecida.

Finalmente, los FPP deben explicar cómo responder a los alumnos que habían cometido errores en sus respuestas. En general, los FPP no describieron cómo explicarían los errores a los alumnos y se centraron en proponer estrategias para resolver las dificultades que habían tenido estos. Teniendo en cuenta este hecho, para las respuestas de Alba, Lucía y Daniel, se valora con:

- 0 puntos; si no se proponen estrategias para superar las dificultades encontradas, no son específicas para el alumno (es decir, se proponen de manera genérica a todos los estudiantes) o solo proponen formas de trabajo en el aula que no involucran el contenido.
- 1 punto; si se proponen estrategias, pero estas no permiten identificar

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

cómo tienen en cuenta la falta de conocimiento matemático en los estudiantes (por ejemplo, proponen usar representaciones gráficas, materiales manipulativos o similares características de la probabilidad).

- 2 puntos; si se proponen estrategias adecuadas que permiten identificar cómo se tiene en cuenta la falta de conocimiento en relación al razonamiento proporcional y probabilístico empleado.

Teniendo en cuenta los criterios y pautas de valoración establecidos, los FPP podían obtener hasta un máximo de 16 puntos. La Tabla 5 resume algunas medidas estadísticas empleadas en el análisis obtenidas con el software SPSS. Se observa que los FPP tuvieron grandes dificultades para responder adecuadamente al análisis propuesto: la puntuación media obtenida fue de 3,59 sobre 16 y la mediana es 3 sobre 16. Únicamente 12 (10,34%) de los participantes obtuvo 8 o más puntos sobre 16, solo dos alcanzaron la máxima puntuación.

Si comparamos los resultados en función al grado de corrección de cada una de las respuestas dadas por los alumnos ficticios, destacamos una puntuación media superior en la valoración más adecuada a la respuesta de Alba y unos resultados nada alentadores en la de Daniel y Lucía, el 87,93% y 51,72%, quienes obtuvieron 0 puntos, respectivamente. Estos resultados no mejoran en la identificación del razonamiento proporcional, ya que la puntuación media es de 0,17 sobre 2 puntos: presentan más del 50% de participantes una puntuación inferior o igual a esta.

Los resultados son aún más preocupantes en la propuesta de gestión de errores, pues el 50% de participantes en el estudio obtuvo una calificación igual a 0 puntos. En concreto, la mayoría obtuvo 0 puntos, en el caso de Daniel (99,14%) y de Lucía (77,59%) y fue algo mejor en el caso de Alba (39,66%, quienes obtuvieron 1 punto y el 8,62%, 2 puntos).

Destacamos el hecho de que el 91,2% de los participantes con una calificación de

Tabla 5

Resumen estadístico de las valoraciones numéricas globales y por apartado: a. Grado de corrección; b. Razonamiento proporcional en la respuesta incorrecta; c. Gestión de los errores

		Mín.	Máx.	Media	Mediana	Desviación
a)	Alba	0	2	1,23	1	0,664
	Daniel	0	1	0,12	0	0,327
	Lucía	0	2	0,52	0	0,567
	Salva	0	2	0,74	1	0,724
	Global (sobre 8)	0	6	2,61	3	0,285
b)		0	2	0,17	0	0,423
c)	Alba	0	2	0,57	0	0,649
	Daniel	0	1	0,01	0	0,093
	Lucía	0	1	0,22	0	0,419
	Global (sobre 6)	0	4	0,80	0,5	0,116
Puntuación total (sobre 16)		**0**	**10**	**3,59**	**3**	**2,261**

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

cero puntos en a), fueron calificados con cero en c). Además, los tres estudiantes que obtuvieron la puntuación máxima (6 de 8 puntos) en la primera tarea, también realizaron buenas propuestas metodológicas. Con objeto de analizar la posible existencia de relación entre ambas variables, se realiza la prueba chi-cuadrado y se obtiene un *p*-valor asociado a de 0,059. Por tanto, no existen evidencias suficientes para rechazar que ambas variables son independientes y, como consecuencia, el comportamiento estadístico de una de las variables no se ve afectado por los valores que toma la otra variable.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido informar de los conocimientos y competencias de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria para interpretar las respuestas de alumnos a una tarea de comparación de probabilidades y proponer acciones que les ayuden a dar una solución adecuada y a superar las dificultades que generaron las inadecuadas.

Los resultados muestran un conocimiento didáctico-matemático insuficiente en las distintas facetas, epistémica, cognitiva e instruccional. Por un lado, los futuros docentes tienen dificultades para justificar por qué consideran correcta la respuesta de un alumno de primaria y se basan en una solución experta o previa ("misma probabilidad") para decidir si es una buena solución o no, sin analizar o cuestionar los argumentos que permiten asegurar que la respuesta del alumno es válida. Esto se pone de manifiesto cuando el 86,21% de los participantes consideraron correcta la solución de Daniel y el 56,03% la de Lucía. Por otro lado, encuentran limitaciones para identificar las posibles estrategias erróneas detrás de las respuestas incorrectas de los alumnos, así como para detectar el razonamiento proporcional en estas mismas. Esto puede estar motivado por un conocimiento sesgado o insuficiente del razonamiento proporcional. Este desconocimiento podría explicar por qué más de la mitad de los FPP no lo identifican en las respuestas incorrectas y cuando lo hacen muestran errores al interpretar la relación de proporcionalidad y las propiedades que la caracterizan (Burgos y Godino, 2020).

Los resultados revelan, también, las limitaciones que presentan los participantes para elaborar propuestas didácticas significativas con las que explicar los errores a los alumnos y ayudarles a superar las dificultades que los generaron. Un porcentaje elevado propone estrategias de forma genérica, sin identificar la peculiaridad de las distintas respuestas y son escasos los que toman en cuenta los errores identificados para sugerir cómo superarlos. Además, el no haber identificado que la respuesta de Daniel, que solo puede ser correcta en determinados casos particulares, llevó a que los FPP no propusieran formas de actuar al respecto. Como sugieren investigaciones previas, tomar decisiones de acción es una competencia difícil de adquirir (Choy, 2016; Jacobs *et al*., 2010; Stahnke *et al*., 2016).

Se hace necesario diseñar acciones formativas en las que se refuercen las componentes del razonamiento proporcional (Buforn *et al*., 2018; Fernández *et al*., 2011; Lamon, 2007). Un conocimiento insuficiente de las formas de razonar en situaciones de proporcionalidad (identificación de la relación multiplicativa entre magnitudes, pensamiento relacional, covarianza, entre otras) limita el desarrollo de otras competencias para la enseñanza, como la de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Creemos que el contexto de la probabilidad es además un hábitat propicio en el que poder poner en juego el razonamiento proporcional. En este sentido, Begolli *et al*. (2021) sugieren que las conexiones explícitas entre las proporciones y las probabilidades pueden llevar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda del razonamiento probabilístico y proponen que puede ser beneficioso, para este último, equilibrar y coordinar la instrucción sobre la probabilidad con la instrucción sobre el razonamiento proporcional.

Creemos que nuestros resultados proporcionan información valiosa adicional para el diseño de materiales en programas de formación docente que consideran las características del aprendizaje de los futuros profesores y su comprensión del razonamiento proporcional en el contexto de la probabilidad. En particular, el tipo de instrumento utilizado en esta investigación podría adaptarse para diseñar material didáctico centrado en el desarrollo de las competencias de los futuros docentes, para analizar el trabajo escrito de los estudiantes. Como señala Llinares (2013), cuando los futuros profesores utilizan elementos matemáticos cada vez más explícitos y características del desarrollo de la comprensión matemática para describir e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, aumentan su competencia profesional.

Agradecimiento

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, PID2019-105601GB-I00/AEI/0.13039/501100011033, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: M.B.N. 40%, M.M.L.M. 20%, C.G.A.A 20%, V.A. 20%.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por M.B.N., previa solicitud razonable.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57-79. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9205-4

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of statistics Education*, *12*(1). https://doi.org/10.1080/10691898.2004.11910715

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa, 10*(1), 11-34. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L., & Contreras, J. M. (2012). Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de educación primaria. *Redimat, 1*(3), 222-245. https://dx.doi.org/10.4471/redimat.2012.13

Begolli, K. N., Dai, T., McGinn, K. M., & Booth, J. L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science 49*, 441–473. https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C., & Petzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 113-135. https://doi.org/0.1080/10986060903022714

Bisquerra, R., & Alzina, R. B. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Editorial La Muralla.

Biza, I., Nardi, E., & Zhachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 301–309. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9043-y

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2015). Prompting Children to Reason Proportionally: Processing Discrete Units as Continuous Amounts. *Developmental Psychology, 51*(5), 615–620. https://dx.doi.org/10.1037/a0039010

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review* (full report). The Nuffield Foundation.

Buforn, A., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestros españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23,* 229-251. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Burgos, M., & Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad: Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM Avances de Investigación en Educación Matemática, 18,* 1–20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Chapman, O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. In: J. J. Lo; K. R. Leatham; L. R. Van Zoest (Eds.) *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_16

Choy, B. H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28*(3), 421-440. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0173-3

English, L. D. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. In *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd Edition, p 3-19. New York y London: Taylor and Francis (Routledge). https://doi.org/10.4324/9780203930236

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2011). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae, 13*(1), 10-28.

Fernández, C., Llinares, C., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Gea, M.M., Parraguez, R., & Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J. M. Muñoz-Escolano; A. Arnal-Bailera; P. Beltrán-Pellicer; M. L. Callejo; J. Carrillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XXI* (pp. 267-276). SEIEM. https://cutt.ly/eRfVp0C

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31. https://cutt.ly/lRfVk8e

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Gómez, E., Batanero, C., & Contreras, C. (2013). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema, 28*(48), 209-229. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3-4), 135-150. https://cutt.ly/URfVnFm

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. In: F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667)**.** NCTM.

Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 95–119). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_5

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In: J. Hiebert; M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Llinares, S. (2013). Professional Noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus, Journal of Education*, *1*(3), 76-93. https://doi.org/10.25749/sis.3707

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance-a commentary. *ZDM, 48*(1-2), 219-226. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0764-1

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad* (Doctoral dissertation). Universidad de Granada. https://cutt.ly/BRfVYdY

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics. Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.* https://cutt.ly/fRfVSaO

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1429-1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Pino-Fan, L., & Godino, A. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, *36*(1), 87-109. https://cutt.ly/dRfVXUo

Simpson, A., & Haltiwanger, L. (2017). This is the first time I've done this: Exploring secondary prospective mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(4), 335-355. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9352-0

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 49–70. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181-204. https://doi.org/10.1007/PL00020739

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. In Chernoff E., Sriraman B. (Eds.), *Probabilistic Thinking. Advances in Mathematics Education* (pp. 123-126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7

Vásquez, C., & Alsina, Á. (2015a). Conocimiento didáctico-matemático del profesorado de educación primaria sobre probabilidad: Diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *BOLEMA, 29*(52), 681-703. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Vásquez, C., & Alsina, A. (2015b). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática,7*, 27-48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_7

Watson, J. M., Collis, K. F., & Moritz, J. B. (2007). The development of chance measurement. In: *Stepping Stones for the 21st Century* (pp. 113-138). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789087901509_008

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr