Uniciencia Vol. 37(1), pp. 1-26, January-December, 2023
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Conexiones matemáticas asociadas al concepto de ecuación cuadrática que establecen futuros profesores mexicanos de matemáticas

Mathematical connections skills associated with the concept of quadratic equation established by prospective Mexican mathematics teachers

Conexões matemáticas associadas ao conceito de equação quadrática estabelecidas por futuros professores mexicanos de matemática

Magali Edaena Hernández-Yañez[1], **Javier García-García**[1*], **Karen Gisel Campo-Meneses**[1]

Received: Sep/6/2022 • Accepted: Jan/24/2023 • Published: Jun/1/2023

Resumen

[Objetivo] Esta investigación plantea como objetivo identificar las conexiones matemáticas que establecen futuros profesores sobre el concepto de ecuación cuadrática. **[Metodología]** Se empleó la técnica de entrevista de grupo focal para recolectar información. Esta consistió en la aplicación de cinco tareas a ocho futuros profesores que se encontraban cursando la Licenciatura en Matemática, área Matemática Educativa. Los participantes son de la ciudad de Chilpancingo del estado de Guerrero en México y sus edades oscilaban entre 21 y 23 años. Debido a la pandemia causada por el COVID-19, las cuatro sesiones grupales se realizaron de manera virtual con una duración de 80 minutos cada una. Se utilizó el análisis temático para examinar los datos recabados. **[Resultados]** Las producciones escritas y verbales de los futuros profesores indicaron que cada uno usó de forma variada las conexiones matemáticas. De manera general, las de más frecuencia fueron procedimental, características y significado; con menor frecuencia, parte-todo, modelado e implicación. Dichas conexiones corresponden a las contempladas en el marco teórico, por lo que se puede argumentar que este resulta válido y pertinente para explorar las conexiones matemáticas en futuros profesores, al resolver tareas matemáticas. **[Conclusiones]** Los participantes dieron significado al concepto de ecuación cuadrática en cuanto a lo que significa en contextos reales y lograron representar la función cuadrática de diversas formas, en el registro algebraico y gráfico. Sin embargo, la mayoría no estableció todas las conexiones matemáticas previstas.

Palabras clave: conexiones matemáticas; futuros profesores de matemáticas; ecuación cuadrática.

* Autor para correspondencia
Magali Edaena Hernández-Yañez, mehernandez@uagro.mx, https://orcid.org/0000-0003-1599-3706
Javier García-García, jagarcia@uagro.mx, http://orcid.org/0000-0003-4487-5303
Karen Gisel Campo-Meneses, karencampo@uagro.mx, https://orcid.org/0000-0001-7483-3134
1 Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, México.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

[Objective] This investigation seeks to identify the mathematical connections established by prospective mathematics teachers related to the concept of the quadratic equation. **[Methodology]** A focal group interview was used to collect information. It consisted of assigning five tasks to eight prospective mathematics teachers who are pursuing a Licentiate's degree in Mathematics in the area of Educational Mathematics. The participants are from the city of Chilpancingo in the state of Guerrero in Mexico, and were from 21 to 23 years old. Due to the COVID-19 pandemic, the four group sessions were held virtually, each lasting 80 minutes. Data were analyzed using a thematic approach. **[Results]** The written and verbal responses of prospective mathematics teachers indicated that each of them used mathematical connections skills in a different way. In general, the most frequent skills were related to procedures, characteristics, and meaning, and less frequently to part-whole, modeling, and implication. These connections correspond to those specified in the theoretical framework; therefore, it can be argued that this framework is valid and relevant for exploring the mathematical connections among prospective mathematics teachers when solving mathematical tasks. **[Conclusions]** The participants assigned meaning to the concept of quadratic equation in terms of what it represents in real contexts, and were able to present the quadratic function in different forms in the algebraic and graphical terms. However, most of them did not make the intended mathematical connections.

Keywords: Mathematical connections; prospective mathematics teachers; quadratic equation.

Resumo

[Objetivo] Esta pesquisa visa identificar as conexões matemáticas que os futuros professores estabelecem sobre o conceito de equação quadrática. [**Metodologia**] A técnica de entrevista em grupo focal foi utilizada para coletar informações e consistiu na aplicação de cinco tarefas a oito futuros professores que frequentavam o curso de Licenciatura em Matemática, área da Matemática Educativa. Os participantes são da cidade de Chilpancingo no estado de Guerrero no México e suas idades variaram de 21 a 23 anos. Devido à pandemia provocada pela COVID-19, as quatro sessões de grupo foram realizadas virtualmente com uma duração de 80 minutos cada. Foi utilizada a análise temática para examinar os dados coletados. **[Resultados]** As produções escritas e verbais dos futuros professores indicaram que cada um utilizou as conexões matemáticas de forma variada. De modo geral, as mais frequentes foram procedimental, características e significado; com menos frequência, fração, modelagem e implicação. Tais conexões correspondem às contempladas no quadro teórico, pelo que se pode afirmar que é válido e relevante explorar as conexões matemáticas nos futuros professores, na resolução de tarefas matemáticas. **[Conclusões]** Os participantes deram significado ao conceito de equação quadrática em termos do que significa em contextos reais e conseguiram representar a função quadrática de várias formas, no registo algébrico e gráfico. No entanto, a maioria não fez todas as conexões matemáticas esperadas.

Palavras-chave: conexões matemáticas; futuros professores de matemática; equação quadrática.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Introducción

En la matemática escolar, el álgebra es un dominio matemático importante, porque busca desarrollar el razonamiento algebraico en el estudiante, lo que conlleva la construcción de generalidades (Lau, 2019). Este tipo de razonamiento tiene dos características: expresar y hacer generalizaciones en sistemas simbólicos formales, así como manipular y razonar símbolos (Kaput, 2008). En el álgebra, uno de los conceptos importantes es la ecuación cuadrática (Didis y Erbas, 2015; Guner, 2017), debido a la conexión que tiene con otros temas u otras disciplinas como el diseño, la ingeniería y la física, igual que por su gran utilidad para modelar y resolver problemas relacionados con situaciones de la vida real (Didis y Erbas, 2015; López *et al.*, 2016). Sin embargo, existen dificultades para entender el concepto de ecuación cuadrática y las reglas que se usan para resolverla (López *et al.*, 2016), entre las que figuran la falta de significado del concepto y no reconocer que la incógnita es una característica primordial.

Además, algunos errores que se han identificado al resolver las ecuaciones cuadráticas se deben a que aplican inadecuadamente los métodos de solución (como la fórmula general, la factorización y completar el cuadrado perfecto), al intentar factorizar ecuaciones cuadráticas que no son factorizables, entre otros. Por ello, es trascendental que los estudiantes desarrollen conocimientos procedimentales y conceptuales de manera integrada (Kotsopoulos, 2007), lo que permitiría establecer conexiones matemáticas entre el álgebra y la aritmética, formando importantes conocimientos matemáticos (Steketee y Scher, 2016). Una vía para atender algunas de estas dificultades es promover el establecimiento de conexiones matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática.

Las conexiones matemáticas son esenciales porque (1) tienen un papel fundamental en el currículo de diferentes países, como Australia, España, Estados Unidos, México, Colombia, entre otros; (2) son consideradas relevantes en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, ya que permiten el desarrollo de otras habilidades como la comunicación, el razonamiento y la argumentación (Businskas, 2008; Evitts, 2004); (3) ayudan a comprender mejor un concepto matemático (Evitts, 2004; García-García y Dolores-Flores, 2018; 2021a; 2021b) y, (4) posibilitan ver a las matemáticas como un todo coherente (Evitts, 2004).

Por las razones mencionadas, es necesario que, en el proceso de aprendizaje, los alumnos desarrollen la capacidad de establecer conexiones matemáticas, para que comprendan la naturaleza de las matemáticas, al reconocer y establecer diferentes tipos de relaciones entre los conceptos. Así pues, se considera pertinente tanto incentivar como analizar el establecimiento de conexiones matemáticas en los estudiantes de los diferentes grados de escolaridad y más en aquellos que se están formando para ser profesores de matemáticas. Estos últimos son los que, en un futuro, se convertirán en agentes sustanciales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los aprendices (García-García, 2019; Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM], 2014).

Cabe señalar que las investigaciones enfocadas en futuros profesores han reportado que estos tienen dificultades para establecer conexiones matemáticas (Eli *et al.*, 2011), por ejemplo, se les complica lograrlas entre diversas representaciones (Moon *et al.*, 2013) y entre los significados asociados a los conceptos matemáticos (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2021). Complejidades como estas obstaculizan la comprensión

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

de diversos conceptos matemáticos (Rodríguez-Nieto *et al*., 2021), entre estos, la ecuación cuadrática. Por tal motivo, es significativo crear tareas matemáticas que consideren específicamente el concepto de ecuación cuadrática, con la finalidad de identificar las conexiones matemáticas que establecen futuros profesores (García-García *et al*., 2022) y, con ello, contribuir, de cierta manera, en mejorar la comprensión matemática de dicho concepto.

La motivación para estudiar las conexiones matemáticas surge a partir de la revisión de la literatura en la cual se ha reportado la importancia de promoverlas en el aula y porque son una vía para atender algunas dificultades identificadas en el aprendizaje de las matemáticas, tal como se mencionó en párrafos anteriores. Para el caso de esta investigación, interesa analizar las conexiones referidas a la ecuación cuadrática en futuros profesores, porque en la literatura se han registrado complicaciones en los estudiantes, cuyas causas, entre otras cosas, pueden deberse a la forma en que es enseñado el concepto. Es común que la enseñanza de la ecuación cuadrática se base, primordialmente, en métodos de solución (Didis, 2018; Guner, 2017; McCarthy, 2020), se dejan de lado los geométricos y gráficos, que pueden dar mayor significado al concepto.

En este sentido, resulta interesante analizar lo que ocurre con los futuros profesores de matemáticas, cuando se enfrentan a tareas que promueven el establecimiento de conexiones matemáticas respecto al concepto de ecuación cuadrática. Se considera que, estando en la etapa de formación, si se llegaran a encontrar dificultades en algún contenido matemático, se podría actuar de forma oportuna desde la enseñanza, con el fin de posibilitar que logren una comprensión matemática deseada. De esta manera, teniendo en cuenta las complicaciones persistentes en futuros profesores, respecto a las conexiones matemáticas y a la importancia de estas en la enseñanza-aprendizaje, se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿qué conexiones matemáticas asociadas al concepto de ecuación cuadrática establecen futuros profesores mexicanos de matemáticas? Se asume que este estudio es relevante y pertinente por las siguientes razones: (1) permite identificar las conexiones matemáticas que realizan los futuros profesores, cuando resuelven tareas que involucran el concepto de ecuación cuadrática; (2) evidencia las situaciones en las que los futuros profesores tienen dificultades para resolver tareas propuestas y los posibles factores que las provocan; (3) las tareas sugeridas pueden ser usadas en la clase de matemáticas en el momento en que se enseña el concepto de ecuación cuadrática; (4) servirá de base para el diseño de futuras actividades ricas en conexiones matemáticas que podrán robustecer la formación de los futuros profesores de matemáticas.

Marco teórico

Por el objetivo planteado en esta investigación, es importante definir conceptos claves como las conexiones matemáticas y las ecuaciones cuadráticas. Esto tiene un doble propósito, guiar el diseño de las tareas matemáticas utilizadas en la colecta de datos y conducir el análisis de estos.

Las conexiones matemáticas

Las conexiones matemáticas, de acuerdo con García-García y Dolores-Flores (2018), se definen como un proceso mediante el cual una persona relaciona de forma verdadera dos o más conceptos, ideas, definiciones,

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

representaciones, teoremas, procedimientos y significados entre sí, con otras disciplinas o la vida real. En la literatura que estudia conexiones matemáticas, se han identificado dos grandes grupos: las intramatemáticas, que surgen entre procedimientos, teoremas, conceptos, representaciones y argumentos matemáticos, y las extramatemáticas, que se establecen a través de un enlace entre un concepto o modelo matemático con problemas no matemáticos o viceversa (Dolores-Flores y García-García, 2017). Para los fines de la presente indagación, se contemplan estos dos grupos, con las siguientes tipologías de conexiones matemáticas adaptadas de Businskas (2008) y García-García y Dolores-Flores (2018):

- **Representaciones diferentes**. Se refieren a la relación entre dos o más representaciones alternas o equivalentes. Las primeras son aquellas que expresan el mismo concepto matemático en distintos registros (verbal, algebraico, gráfico, tabular), por ejemplo, se puede vincular la representación algebraica de una ecuación cuadrática $x^2 - 3 = 5$ con su representación gráfica en el plano cartesiano. Por su parte, las representaciones equivalentes son las que expresan el mismo concepto matemático dentro del mismo registro, por ejemplo, la relación entre dos representaciones algebraicas de una ecuación cuadrática: $x^2 - 3 = 5$ y $x^2 = 8$.
- **Característica**. Remite a la relación entre el concepto matemático abordado y las características que lo hacen diferente o semejante a otro; por ejemplo, el vincular que la ecuación cuadrática tiene a lo más dos soluciones reales.
- **Procedimental**. Tiene que ver con la relación entre reglas, algoritmos, fórmulas u otro medio empleado para resolver un problema. En este sentido, A es un procedimiento empleado al trabajar con el objeto B. Por ejemplo, cuando se utiliza la fórmula general para llegar a las soluciones de la ecuación cuadrática.
- **Parte-todo**. Se manifiesta cuando existen relaciones lógicas entre conceptos matemáticos de generalización (entre casos particulares y generales) o de inclusión (es decir, un concepto matemático está contenido en otro). Por ejemplo, la generalización se presenta cuando, a través de casos específicos de un problema, se construye una ecuación cuadrática que dé solución para n casos. La inclusión puede darse al vincular que la ecuación cuadrática tiene una incógnita (y la incógnita es parte de la ecuación cuadrática).
- **Significado**. Es la asociación entre un concepto matemático y el sentido que se le atribuye en cuanto lo que es y lo que representa. Puede incluir la definición que los sujetos construyen como parte de su experiencia al trabajar con ciertos conceptos matemáticos. Por ejemplo, al vincular que solamente los valores positivos en las soluciones de las ecuaciones cuadráticas pueden representar medidas o longitudes en la vida real.
- **Modelado**. Se presenta esta tipología de conexiones matemáticas cuando se liga un problema en contexto y un modelo matemático que le dé solución o viceversa. Por ejemplo, para encontrar las medidas de un terreno que tiene de área 600 m^2 y el largo mide 10 m más que 2 veces el ancho, se construye un modelo matemático equivalente o igual a $2x^2 + 10x = 600$, que permite hallar la solución al problema.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

- **Implicación**. Es una relación de tipo lógico de la forma si A, entonces B. Por ejemplo, si es una ecuación cuadrática en su forma general, entonces consta de tres términos.

La ecuación cuadrática

En relación con las ecuaciones cuadráticas, encontramos que para Garza (2014) son aquellas en las cuales el mayor exponente de la incógnita es 2, que se representa como $ax^2 + bx + c = 0$ y se denomina forma general o ecuación cuadrática completa, donde a, b y c son números reales y a es diferente de cero.

Un caso particular de las ecuaciones cuadráticas es cuando $b = 0$, es decir, $ax^2 + c = 0$ y $c = 0$; esto es $ax^2 + bx = 0$, denominadas ecuaciones cuadráticas incompletas. A las primeras se les denomina puras, que están compuestas por la parte cuadrática y la constante; a las segundas se les llama mixtas o binomiales, que contienen la parte cuadrática y la parte lineal.

Las ecuaciones cuadráticas son utilizadas para establecer modelos algebraicos básicos, así como para plantear sistemas de ecuaciones y resolverlos; también, para utilizar el lenguaje algebraico y aprender a integrar conocimientos que solucionen los problemas. Primordialmente, para resolver ecuaciones cuadráticas se enseña los métodos de factorización, la fórmula general y completar el trinomio cuadrado perfecto (Didis, 2018; Guner, 2017; McCarthy, 2020).

Metodología

Esta investigación es cualitativa. Como instrumento de recolección de datos se implementó la técnica de grupo focal, también conocida como entrevista de grupo focal, en la que se realiza una entrevista grupal, con el objetivo de obtener datos de un grupo de individuos, ya sea de forma presencial, a través de webcams, entornos virtuales o redes sociales (Martínez, 2012; McDermott, 2013). En dicha entrevista, las preguntas deben ser abiertas (Krueger, 2006), el número máximo de participantes es diez (Dörnyei, 2007) y es preciso tener conocimientos, así como experiencia sobre el tema por investigar (Polit y Beck, 2006). Además, los participantes requieren estar preparados y dispuestos a proveer información necesaria (Stewart y Shamdasani, 2015).

Para tener fluidez y atención en la entrevista con jóvenes adultos y un moderador experimentado, se recomienda un tiempo de 90 minutos, aproximadamente (Gibson, 2007). Una vez recolectados los datos, se empleó el análisis temático para su análisis, ya que, de acuerdo con Rodas y Pacheco (2020), es uno de los métodos más utilizados para el examen de los datos cualitativos. Siguiendo estos lineamentos, a continuación, se describen los elementos que conforman la investigación.

Instrumento

Se planeó un protocolo de entrevista, el cual se constituye de cinco tareas y posibles preguntas guías para plantearlas a los entrevistados. Las tareas se diseñaron teniendo en cuenta que fueran ricas en conexiones matemáticas, respecto al concepto de ecuación cuadrática, y validadas mediante una prueba piloto. Estas se plantearon de manera abierta, lo que posibilitó a los futuros profesores poner en juego todas las ideas que consideraran pertinentes para resolverlas. Cada tarea fue estructurada para que analizaran e interpretaran situaciones específicas, las cuales involucran representaciones gráficas, verbales o algebraicas del concepto de ecuación cuadrática. Las tareas 1 y 2 estuvieron centradas en contextos

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

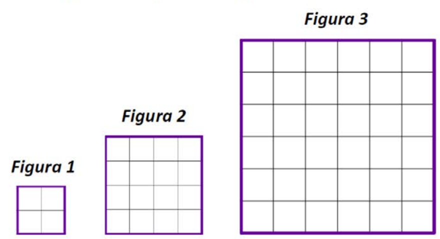
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

escolares rutinarios, mientras que las 3, 4 y 5 representaron situaciones en contexto real.

La tarea 1 consistió en llegar a la construcción de una fórmula general a_n, donde encontrar el número de cuadrados para la n-ésima posición implica plantear y resolver una expresión cuadrática, dado que las figuras tienen un crecimiento cuadrático (figura 1). Esta tarea introduce el concepto de ecuación cuadrática y permite el uso de las conexiones matemáticas característica, procedimental, representaciones diferentes y parte-todo.

La tarea 2 permitió vincular la ecuación cuadrática con la función cuadrática, al reconocer que las gráficas presentadas en las tareas pertenecían a funciones cuadráticas. Así, se buscó identificar las características de los puntos señalados en las gráficas (el vértice de la parábola y las raíces o soluciones de estas) e identificar contextos de la vida real que se puedan analizar a través de una función y ecuación cuadrática (figura 2). Se prevé el uso de las conexiones matemáticas característica, procedimental, representaciones diferentes y significado.

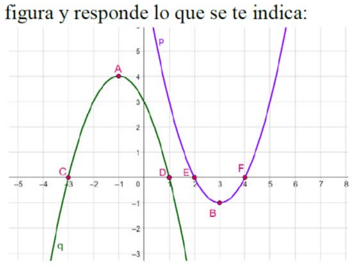
1. Observa las siguientes figuras y responde lo que se te indica:



a) ¿Cuántos cuadrados habrá en la ***figura 4***?
b) ¿Cuántos cuadrados habrá en la ***figura 9***?
c) ¿Cómo estableces el número de cuadros que hay en la ***figura n***? Explica tu respuesta.
d) Muestra otras maneras diferentes con las que se pueda observar el incremento de los cuadros de las ***figuras.*** Explica tus respuestas.

Figura 1. *Tarea 1*.
Fuente propia de la investigación.

2. Observa la siguiente figura y responde lo que se te indica:



a) ¿Qué tipo de función son las gráficas ***p*** y ***q***? ¿Por qué?
b) ¿Qué indican los puntos A, B, C, D, E y F que se muestran en las gráficas?
c) ¿De qué otra manera puedes expresar cada una de las gráficas? Explica tu respuesta.
d) Menciona algunos fenómenos que muestra el mismo comportamiento que se observa en las gráficas.

Figura 2. *Tarea 2*.
Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

En la tarea 3, se brinda el área de un terreno y las condiciones por las que están dadas sus medidas. Con ello, se pretende mostrar una situación en contexto para llevarla al concepto de ecuación cuadrática y construir un modelo matemático cuadrático para dar respuesta a la tarea propuesta (figura 3). Se contempla que los futuros profesores establezcan las conexiones matemáticas de tipo característica, procedimental, representaciones diferentes, significado y modelado.

En las tareas 4 y 5, se vincula la ecuación cuadrática con un contenido de física (lanzamiento vertical de un objeto) y la función cuadrática, con la intención de que los futuros profesores se den cuenta de que la matemática puede relacionarse y estar inmersa no solo en contextos de la vida real, sino también en otros temas matemáticos y más disciplinas (figura 4). Para estas tareas, se espera que emerjan las conexiones matemáticas de tipo característica, procedimental, representaciones diferentes, significado e implicación.

3. El área de un terreno es de $600\ m^2$. El largo mide $10\ m$ más que 2 veces el ancho.
   a) Halla las dimensiones del terreno.
   b) ¿Cuánto mide lo largo? Explica tu respuesta.
   c) ¿Cuánto mide lo ancho? Explica tu respuesta.
   d) ¿Cuánto mide el perímetro? Explica tu respuesta.
   e) ¿Qué representan el *área* y las *medias* que puede tener el *largo* del terreno en una función cuadrática? Explica tu respuesta.
   f) ¿Existen otras medidas diferentes a las que encontraste que satisfagan la misma área del terreno, sin cambiar su construcción? Explica tu respuesta.

Figura 3. *Tarea 3.*
Fuente propia de la investigación.

4. Un objeto es lanzado hacia arriba con una rapidez de 40 m/s (velocidad inicial) alcanzando una altura máxima a los 4.082 s.
   a) Muestra de diferentes maneras el comportamiento de la altura del objeto.

   Pistas: $h = v_o t \pm \frac{9.8t^2}{2}$ $(-)$***Objeto sube*** **o** $(+)$***Objeto baja***

   b) ¿En qué tiempo (minutos/segundos) el objeto vuelve a tocar el piso?
   c) ¿Qué representan en las ecuaciones cuadráticas las medidas (tiempo) donde el objeto toca el piso?

5. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez de 5m/s (velocidad inicial).

   Pistas: $h = v_o t \pm \frac{9.8t^2}{2}$ $(-)$***Objeto sube*** **o** $(+)$***Objeto baja***

   a) ¿En qué tiempos (minutos/segundos) el objeto toca el piso?
   b) ¿Qué representan en las ecuaciones cuadráticas las medidas (tiempo) donde el objeto toca el piso?
   c) Muestre de diferentes maneras la altura de la pelota.

Figura 4. *Tareas 4 y 5.*
Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Participantes y colecta de datos

En esta investigación, participaron ocho futuros profesores (seis mujeres y dos hombres) que se encontraban estudiando el octavo semestre de la Licenciatura en Matemáticas, en el área de Matemática Educativa. Esto aseguraba conocimiento y experiencia sobre el concepto de ecuación cuadrática, dado que este se contempla en los planes y programas de estudio de secundaria y media superior (García-García *et al*., 2022). En el momento de la colecta de datos, los participantes radicaban en la ciudad de Chilpancingo, Guerrero, en México, y sus edades oscilaban entre 21 y 23 años. La intervención de los futuros profesores fue voluntaria y declararon estar de acuerdo con que sus datos fueran usados para el estudio. En adelante, serán identificados como FP1, FP2, FP3, FP4, FP5, FP6, FP7 y FP8.

Dado que en el momento de la aplicación nos encontrábamos en la pandemia causada por el COVID-19, el moderador fue el responsable de grabar toda la colecta de datos, en un ambiente virtual. En un primer momento, el moderador proyectó en Google Meet las tareas, para que los futuros profesores las resolvieran de manera escrita; una vez que las terminaron, las subieron a Classroom y esta sesión tuvo una duración total de 90 minutos. En un segundo momento, se realizó la entrevista de grupo focal, en cuatro sesiones de 80 minutos cada una. Para esto, el moderador fue el responsable de dos funciones: la primera fue guiar la entrevista, es decir, estando todos en una misma sala de Google Meet, por tarea, preguntaba a cada uno de los futuros profesores sobre las respuestas que subieron a Classroom; en la segunda, conforme participaban los ocho futuros profesores, proyectó, en la sala, dichas respuestas, de manera que todos escuchaban y veían la explicación.

Análisis de datos

Para el análisis de los datos, se utilizó el análisis temático sugerido por Braun y Clarke (2006, 2012) y el método de triangulación de investigadores, con el afán de evitar el sesgo en lo evaluado (Aguilar y Barroso, 2015). El análisis temático tiene como objetivo identificar patrones de significados (temas), a través de un conjunto de datos, para dar respuesta a la pregunta de investigación. Este método está estructurado por las siguientes seis fases (Braun y Clarke, 2006, 2012):

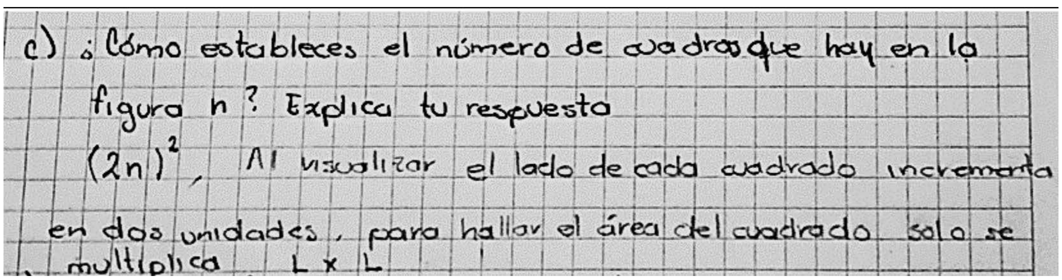
Fase 1. *Familiarizarse con los datos*. Se revisaron las respuestas escritas de los futuros profesores junto con las transcripciones de las entrevistas.

Fase 2. *Generalización de códigos iniciales*. Se establecieron códigos iniciales para una primera clasificación basada en las respuestas de las tareas. Esto se logró a partir de la fase 1, en la cual se identificaron respuestas similares, de modo que se efectuó una agrupación de las producciones escritas, de acuerdo con las diferentes formas en que los futuros profesores resolvieron cada inciso de cada tarea. A continuación, en la tabla 1, se muestra un ejemplo con la tarea 1:

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Tabla 1. *Generalización de códigos de las respuestas de los futuros profesores*

Extracto	Código
Entrevistador: En el primer inciso, ¿cómo resolvieron la primera actividad? ¿Qué hicieron para resolver esa actividad? FP: Bueno, yo para responder mis preguntas, lo primero que hice fue visualizar cada figura y notar cuál era la longitud de cada cuadrado, *por ejemplo, en la figura 1 su longitud es de 2 unidades, en la figura 2 es de 4 unidades, en la figura 3 es de 6 unidades*, eh, me di cuenta que *la figura iba aumentando en longitud, 2 unidades por cada lado*… como sabemos *para hallar el área de un cuadrado la fórmula es lado al cuadrado*, por lo tanto, *la figura 4, como aumenta en 2 unidades, sería su longitud de 8 y al cuadrado son 64… Igual para la figura 9 aumenté 2 unidades*. Otra cosa que me di cuenta es que *multipliqué el 2 que es el incremento por el número de la figura de la que nos estábamos refiriendo, por ejemplo la figura 1 es 2 x 1, la figura 2 es 2 x 2, la figura 3 2 x 3 y me va dando de esta manera la longitud de su lado, entonces, para la figura 9 multipliqué 2 x 9 y esto lo elevé al cuadrado, por lo tanto, en la figura 9 hallé que eran 324 y así fui visualizando cómo se comportaba y de ahí asigné una fórmula generalizada para poder llegar a las figuras n-ésimas.*	C1. La longitud del lado de la figura 1 es de 2 unidades, en la figura 2 es de 4 unidades, en la figura 3 es de 6 unidades. C2. Cada figura va aumentando en longitud, 2 unidades por cada lado. C3. La fórmula para hallar el área de un cuadrado es lado al cuadrado. C4. El aumento de las figuras es de 2 unidades. C5. Para encontrar la cantidad de cuadrados de cada figura, se encuentra su área. C6. Para encontrar la figura, se debe elevar al cuadrado el producto del incremento con la posición de la figura. C7. La expresión $(2n)^2$ permite encontrar el área de n-ésimas figuras.



Nota: Fuente propia de la investigación.

Tabla 2. *Agrupación de los códigos iniciales para crear subtemas*

Códigos	Subtemas
C19. La gráfica parabólica es simétrica, debido a que actúa de la misma manera cuando sube y baja el objeto. C22. En la gráfica se visualiza el tiempo que tarda el objeto en subir y tocar nuevamente el piso.	Sb. La gráfica de una parábola es simétrica.

Nota: Fuente propia de la investigación.

Fase 3. *Búsqueda de temas y subtemas*. Se revisaron los códigos de la fase anterior para identificar áreas de similitud; posteriormente, se agruparon aquellos que tenían algún rasgo en común, con el fin de formar grupos y, con ello, asignar subtemas que describieran las características principales de las agrupaciones ya formadas, como se observa en la tabla 2. Cabe señalar que los temas fueron considerados

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

como las tipologías de conexiones matemáticas descritas en el marco conceptual y los subtemas se construyeron a partir de los datos.

Fase 4. *Revisión de los subtemas*. Se revisa la coherencia entre los subtemas identificados y los datos para el refinamiento de los subtemas a través de la triangulación de investigadores. Esto, con el fin de eliminar el sesgo y aumentar tanto la calidad como la validez en el análisis, y finalmente llegar a un conceso con respecto a los últimos subtemas identificados en este estudio (ver tabla 3).

Fase 5. *Definición y denominación de temas y subtemas*. Consistió en analizar cada subtema por separado y, de acuerdo con la información que evidenciaban, se agruparon según los temas que, para este caso, son las tipologías de conexiones matemáticas definidas en el marco conceptual. Esto se observa en la tabla 4.

Fase 6. *Elaboración de reporte*. Hace referencia a la redacción secuencial y organizada del informe, el cual incluye el conjunto de los temas y subtemas completamente nombrados y definidos, que contienen las conexiones matemáticas encontradas.

Resultados

El análisis de las producciones tanto escritas como verbales de los ocho futuros profesores indicó que cada uno utilizó, de forma variada, las conexiones matemáticas (ver tabla 5). Estas corresponden con

Tabla 3. *Refinamiento de subtemas*

Subtemas originales	Subtemas refinados (subtemas)
Las representaciones, tabular y algebraica, describen el problema.	Las representaciones, tabular y algebraica, describen el patrón de comportamiento en el problema.

Nota: Fuente propia de la investigación.

Tabla 4. *Identificación de conexiones matemáticas en los subtemas*

Subtemas	*Temas (conexiones matemáticas)*
Sb. La resolución de la ecuación cuadrática $2x^2 + 10x = 600\ m^2$ o $x(2x + 10) = 600$ permite obtener las medidas del terreno.	C. Procedimental
Sb. La superficie de un terreno se obtiene en metros cuadrados.	C. Significado

Nota: Fuente propia de la investigación.

Tabla 5. *Conexiones matemáticas establecidas por los futuros profesores en las tareas*

Tareas	Conexiones matemáticas esperadas	Futuros profesores que las establecieron							
		FP1	FP2	FP3	FP4	FP5	FP6	FP7	FP8
1	Características	*							
	Procedimental	*		*			*	*	
	Representaciones diferentes	*		*				*	
	Parte-todo	*	*	*		*	*		
2	Características	*	*	*		*	*		*
	Procedimental								
	Representaciones diferentes	*	*	*	*	*	*		*
	Significado	*		*			*	*	

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Tareas	Conexiones matemáticas esperadas	Futuros profesores que las establecieron							
		FP1	FP2	FP3	FP4	FP5	FP6	FP7	FP8
3	Características	*	*						
	Procedimental	*	*	*	*	*	*		*
	Representaciones diferentes	*	*	*	*	*	*	*	*
	Significado	*	*			*			
	Modelado	*	*	*	*	*	*	*	*
4	Características	*		*		*	*		*
	Procedimental	*	*				*	*	*
	Representaciones diferentes	*	*						*
	Significado	*		*		*	*		*
	Implicación	*							
5	Características	*		*		*	*		*
	Procedimental		*	*	*	*	*	*	*
	Representaciones diferentes	*	*	*		*	*	*	*
	Significado	*		*		*	*		*
	Implicación			*					

Nota: Fuente propia de la investigación.

las previstas en el marco conceptual, por lo que se puede argumentar que dicho marco es válido y pertinente, cuando se exploran las conexiones matemáticas que futuros profesores establecen al resolver tareas matemáticas. A continuación, presentamos, globalmente, los resultados acordes con las tipologías de conexiones matemáticas evidenciadas en las producciones de los FP.

En línea con lo presentado en la tabla 5, seguidamente, se detalla el análisis consonante con las tipologías de conexiones matemáticas.

Conexión matemática característica

Se esperaba que los ocho FP establecieran la conexión matemática característica en las cinco tareas, sin embargo, solo uno lo logró. Este tipo de conexión matemática fue identificada en diversos aspectos, por ejemplo, hacen alusión a las características de la ecuación cuadrática, de la función cuadrática y del problema. En la tabla 6, se presentan los subtemas que surgieron a partir de sus producciones tanto verbales como escritas.

Tabla 6. *Subtemas asociados a la conexión característica en cada tarea*

Tarea	Subtema	Futuros profesores
1	La longitud del lado de cada figura aumenta 2 unidades respecto a la anterior.	FP1
2	El vértice (punto máximo o punto mínimo) y las raíces (cortes en x), son elementos que componen la función cuadrática y su gráfica.	FP1
	Las gráficas de funciones cuadráticas tienen un punto máximo (o vértice), un punto mínimo y raíces (intercepción con el eje x).	FP2
	Cuando el término cuadrático es mayor que 0, entonces, la parábola es cóncava hacia arriba y, cuando es menor que 0, es cóncava hacia abajo.	FP3
	El término independiente de $f(x) = ax^2 + bx + c$ gráficamente representa el corte en el eje y cuando x vale 0.	FP5
	La función cuadrática tiene un mínimo o un máximo.	FP6
	Las gráficas de las funciones cuadráticas p y q interceptan al eje x y tienen vértices.	FP8

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Tarea	Subtema	Futuros profesores
3	Las dimensiones de un terreno rectangular son largo y ancho.	FP1
	El perímetro de un terreno rectangular se obtiene sumando 2 veces el ancho más 2 veces el largo.	
	Las ecuaciones cuadráticas tienen 2 soluciones.	FP2
	El área del terreno es el término independiente de la ecuación $2a^2 + 10a - 600 = 0$.	
4	La gráfica de una parábola es simétrica.	FP1
	En la trayectoria del lanzamiento vertical de un objeto, el tiempo de subida es el mismo que de bajada.	FP6
	En el lanzamiento vertical, las medidas que representan el tiempo en el cual el objeto toca el piso son las raíces de la función cuadrática que se forma.	FP1, FP3, FP5, FP6 y FP8
5	Las raíces en la función cuadrática formada en el lanzamiento vertical son las medidas que representan el tiempo en el cual el objeto toca el piso.	FP1, FP3, FP5, FP6 y FP8

Nota: Fuente propia de la investigación.

Un ejemplo particular es el FP1, quien evidenció la conexión matemática característica en todas las tareas y en los diversos aspectos. En las tareas 1 y 3, estableció características a lo interno del problema que le permitieron llegar a la solución de este. Por ejemplo, en la tarea 1, a través de la visualización de la longitud de las figuras dadas, encontró la regla respecto al aumento de una figura a otra; esta es una característica del problema que le permitió encontrar el número de cuadrados existentes en la figura n-ésima, como se muestra en el siguiente extracto:

Entrevistador:	¿Cómo resolviste la primera tarea?
FP1:	Bueno, para responder las preguntas, lo primero que hice fue visualizar cada figura y notar cuál era la longitud de cada cuadrado, por ejemplo, en la figura 1 su longitud es de 2 unidades, en la figura 2 es de 4 unidades, en la figura 3 es de 6 unidades y me di cuenta de que la figura iba aumentando en longitud, 2 unidades por cada lado […] y así fui visualizando cómo se comportaba y de ahí asigné una fórmula generalizada para poder llegar a las figuras n-ésimas.

En las tareas 2, 4 y 5, FP1 identificó características que corresponden a la función cuadrática, tanto en la tarea de contenido solo matemático como en la que se vinculaba con una situación de la vida real. En el primer caso, coincidió con FP2, pues ambos notaron lo representado por los puntos señalados en la figura de funciones cuadráticas que se les presentó (ver figura 5). Para el segundo caso, determinó que en el lanzamiento vertical es posible encontrar las raíces de la función cuadrática que forma este fenómeno. Este último hallazgo fue notado también por FP3, FP5, FP6 y FP8.

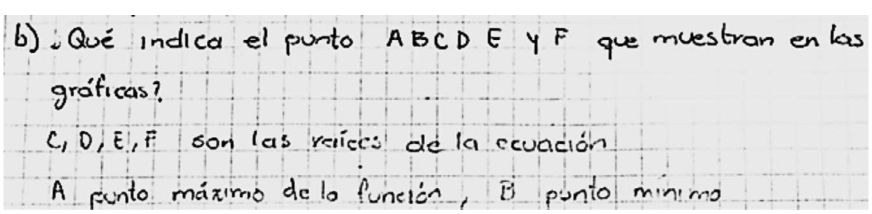


Figura 5. *Producción escrita de FP1.*
Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

En lo que respecta al concepto de ecuación cuadrática, FP2 manifestó que tiene dos soluciones. Además, en la tarea 3 distinguió que, en la ecuación cuadrática $2a^2 + 10a - 600 = 0$ que surge de los datos, existe el término independiente, el cual corresponde al área del terreno descrito. En otras palabras, reconoció que este término no tiene incógnita.

Conexión matemática procedimental

La conexión matemática procedimental es una de las que se esperaba fueran establecidas en todas las tares por parte de todos los futuros profesores, sin embargo, no resultó así. En la tarea 2, ningún profesor realizó procedimientos para solucionarla. Por el contrario, en las tareas 3 y 5, casi todos efectuaron procedimientos para resolver el problema. En la tabla 7, se muestran los subtemas relacionados con la conexión matemática procedimental.

Tabla 7. *Subtemas asociados a la conexión procedimental en cada tarea*

Tarea	Subtema	Futuros profesores
1	La cantidad de cuadrados de cada figura se encuentra aplicando la fórmula del área de un cuadrado.	FP1
	Los cálculos aritméticos permiten solucionar el problema.	FP3
	La expresión $2n$ x $2n$ se establece a partir de casos particulares.	FP6
	El número total de cuadrados de una figura se obtiene al multiplicar lado por lado.	FP7
2	No se evidenciaron conexiones matemáticas.	
3	La fórmula general ayuda a encontrar las longitudes desconocidas de un terreno rectangular.	FP1, FP5, FP6 y FP8
	El producto de las longitudes desconocidas del terreno rectangular forma la ecuación cuadrática $2x^2 + 10x - 600$ o de la forma $x(2x + 10) = 600$.	FP1, FP3 y FP8
	La resolución de la ecuación cuadrática $2x^2 + 10x - 600$ o de la forma $x(2x + 10) = 600$ permite obtener las medidas del terreno.	FP1, FP3 y FP8
	La ecuación cuadrática $2a^2 + 10a - 600 = 0$ se obtiene con el producto de las longitudes desconocidas del terreno rectangular.	FP2
	La resolución de la ecuación cuadrática $2a^2 + 10a - 600 = 0$ permite obtener las medidas del terreno rectangular.	FP2
	El producto de las longitudes desconocidas del terreno rectangular forma la ecuación cuadrática $2x^2 + 10x - 600$ o de la forma $x^2 + 5x - 300 = 0$.	FP4
	La resolución de la ecuación cuadrática $2x^2 + 10x - 600$ o de la forma $x^2 + 5x - 300 = 0$ permite obtener las medidas del terreno.	FP4
	El producto de las longitudes desconocidas del terreno rectangular forma la ecuación cuadrática $600 = a(2a + 10)$ o de la forma $2a^2 + 10a - 600 = 0$.	FP5 y FP6
4	La altura que alcanza un objeto se obtiene de manera algebraica y gráfica.	FP1
	Al resolver una función cuadrática $h = v_o t \pm \frac{9.8t^2}{2}$ con los datos proporcionados en la tarea, se obtuvieron las raíces $x_1 = o$ y $x_2 = 8.164$.	FP1
	Con la fórmula $h = v_o t \pm \frac{9.8t^2}{2}$ se obtiene la altura de un objeto.	FP2 y FP7
	Al sumar 2 veces el tiempo de subida, se obtiene el tiempo total del recorrido del objeto lanzado verticalmente.	FP6
	Encontrar el valor de h en la ecuación cuadrática $h = \frac{{v_0}^2}{2g}$ permite obtener la altura máxima del objeto.	FP8

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Tarea	Subtema	Futuros profesores
5	El tiempo en que el objeto vuelve a tocar el piso, se encuentra despejando la incógnita *t* (tiempo) de la ecuación $h = V_o * t + \frac{1}{2} * g * t^2$.	FP2
	La gráfica es un medio para predecir la trayectoria de la pelota.	FP3
	El doble del producto del resultado obtenido, al aplicar la fórmula $t = \frac{v_o}{g}$, es el tiempo total de la trayectoria de un objeto lanzado verticalmente.	FP4, FP5, FP6 y FP7
	La altura de la pelota se obtiene al encontrar el valor de *h* ya sea de manera gráfica o algebraica en la función cuadrática $h = \frac{{v_0}^2}{2g}$.	FP5 y FP8

Nota: Fuente propia de la investigación.

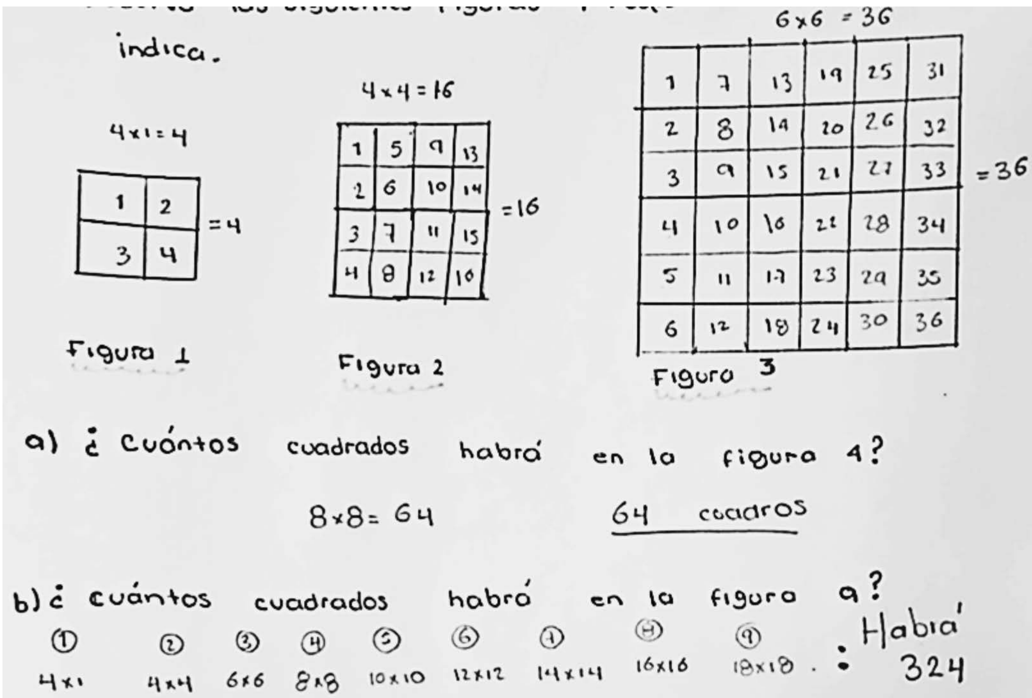


Figura 6. *Cálculos aritméticos de la tarea 1.*
Fuente propia de la investigación.

Esta conexión matemática se manifestó en tres direcciones: la primera se vincula con procedimientos de tipo aritmético y algebraico, que fueron empleados para llegar a construir la ecuación cuadrática que diera solución al problema; la segunda fue utilizando fórmulas que les permitieran llegar al resultado; la tercera se presentó al usar la gráfica como medio para encontrar la altura de la pelota. En las tareas 1 y 3, las ecuaciones encontradas se construyeron realizando cálculos con los datos. En la tarea 1, se realizaron multiplicaciones para encontrar el total de cuadrados que tenían las figuras (ver figura 6).

Además, en las tareas 3, 4 y 5, se usaron fórmulas para llegar a la solución. En la tarea 3, el largo y ancho de un terreno se encontraba al resolver la ecuación cuadrática que surgió de los datos. Para esto, FP1, FP5,

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

FP6 y FP8 utilizaron la fórmula general $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, mientras que los futuros profesores restantes recurrieron a la factorización. En la figura 7, se observa una evidencia de esto.

En las tareas 4 y 5, se emplearon diversas fórmulas de la física, las cuales correspondían con ecuaciones cuadráticas, para obtener la altura y el tiempo en el lanzamiento vertical de un objeto. Esta variedad en las fórmulas se debió a que algunos futuros profesores no trabajaron con la ecuación cuadrática que se les proporcionó en dichas tareas, se valieron de otras que ya están estipuladas en física, como $h = \frac{{v_0}^2}{2g}$, $t = \frac{v_o}{g}$ y $h = V_o * t + \frac{1}{2} * g * t^2$, que no dejan de tener el término cuadrático y que les permitieron llegar a la solución de la tarea. Además, la tarea 5 posibilitó visualizar la altura máxima de la pelota, a través de la construcción de la gráfica que corresponde a la función cuadrática $h = \frac{{v_0}^2}{2g}$, como se muestra en la figura 8.

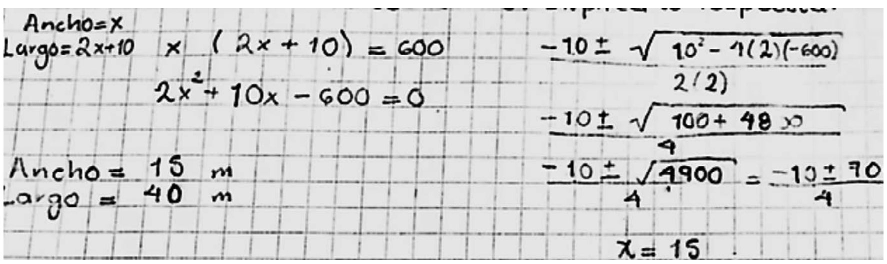


Figura 7. *Resolución de una ecuación cuadrática por fórmula general.*
Fuente propia de la investigación.

Conexión matemática representaciones diferentes

La conexión matemática representaciones diferentes (alternas y equivalentes) también se contempló en las cinco tareas, sin embargo, solo un FP logró establecerla en todas. Pese a esto, los resultados arrojan que los futuros profesores sí pueden vincular el concepto de ecuación y función cuadrática, en al menos dos registros: de manera alterna el geométrico-algebraico y de forma equivalente el algebraico-algebraico. En la tabla 8, se muestran los subtemas obtenidos de los datos.

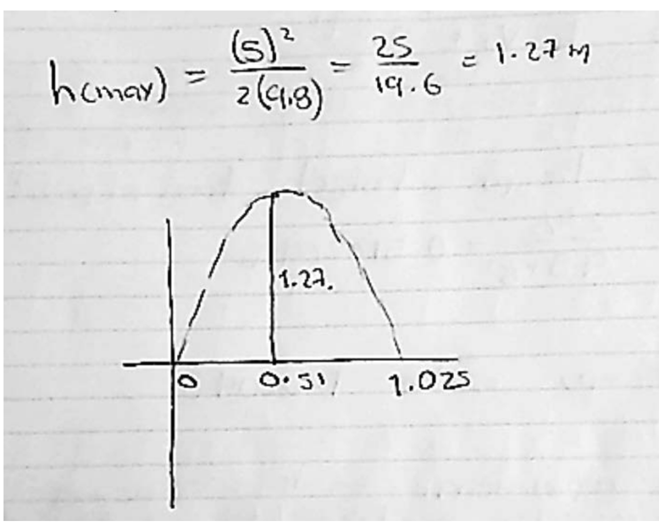


Figura 8. *La altura máxima de la pelota algebraica y gráficamente*.
Fuente propia de la investigación.

En las cinco tareas, los futuros profesores manifestaron diferentes representaciones alternas de un mismo concepto. En la tarea 1, se identificaron tres formas distintas para obtener el número total de cuadrados de cada figura que se les pidió. Es decir, FP1 logró llegar a la solución del problema, construyendo una ecuación, a partir de las figuras que daba el problema; FP3 optó por realizar una tabla y una ecuación; FP7 dibujó las

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Tabla 8. *Subtemas asociados a la conexión matemática representaciones diferentes en cada tarea*

Tarea	Subtema	Futuros profesores
1	La representación geométrica de las figuras permite generar la expresión $(2n)^2$.	FP1
	Las representaciones tabular y algebraica describen el patrón de comportamiento en el problema.	FP3
	El número total de cuadrados que tiene una figura se encuentra al construir su representación geométrica.	FP7
2	Representaciones algebraicas $y = x^2 - 6x + 8$ y $y = x^2 - 2x + 5$ pertenecen a funciones cuadráticas.	FP1 y FP7
	La factorización de las gráficas de $x^2 - 6x + 8$ y $x^2 - 2x + 3$ son $(x - 2)(x - 4)$ y $(x + 3)(x - 1)$, respectivamente.	FP2
	Con las expresiones algebraicas $q = (x + 3)(x - 1)$ y $p = (x - 2)(x - 4)$, se forman funciones cuadráticas.	FP3
	Las gráficas de $q = x^2 - 2x + 3$ y $p = x^2 - 6x + 8$ pertenecen a funciones cuadráticas.	FP4
	La gráfica de una función cuadrática también se puede expresar en forma polinómica $y = x^2 + bx + c$; factorizada $y = (x - x_1)(x - x_2)$, y canónica $y = a(x - xv)^2 + yv$.	FP5
	La función cuadrática puede representarse en forma polinómica $y = ax^2 + bx + c$; factorizada $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ y canónica $y = a(x - x_v)^2 + y_v$.	FP6
	Las gráficas de las funciones cuadráticas p y q se pueden representar analíticamente de la forma $(x - c)(x - d)$.	FP8
3	Las medidas del terreno rectangular se obtienen a través de la ecuación cuadrática $2x^2 + 10x = 600$ o de la forma $x(2x + 10) = 600$.	FP1, FP3, FP7 y FP8
	Las medidas del terreno rectangular se obtienen a través de una ecuación cuadrática y su construcción geométrica.	FP2. FP6, FP7 y FP8
	Las medidas del terreno rectangular se obtienen a través de la ecuación cuadrática $2x^2 + 10x = 600$ o de la forma $x^2 + 5x - 300 = 0$.	FP4
	Las medidas del terreno se obtienen a través de la ecuación cuadrática $600 = a(2a + 10)$ o de la forma $2a^2 + 10a = 600 = 0$.	FP2, FP5 y FP6
4	La altura que alcanza un objeto se obtiene de manera algebraica y gráfica.	FP1
	La gráfica de una función cuadrática describe el problema dado.	FP2
	La representación gráfica de la trayectoria del lanzamiento de un objeto corresponde a una función cuadrática.	FP8
5	La trayectoria de la altura de la pelota se puede representar mediante la función cuadrática $h = 5t - 4.9t^2$ y la gráfica correspondiente.	FP1
	La altura de la trayectoria de una pelota se puede representar con una función cuadrática y una gráfica.	FP2 y FP3
	La trayectoria de la altura de la pelota se puede representar con la expresión $h = \frac{{v_0}^2}{2g}$ y su gráfica.	FP5, FP6 y FP8
	Con las ecuaciones $h = v_o t \pm \frac{9.8t^2}{2}$ y $t = \frac{v_o}{g}$, se puede obtener el tiempo que tarda el lanzamiento vertical de un objeto.	FP7

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

figuras solicitadas (representación geométrica) y realizó la multiplicación de sus lados, como se muestra en la figura 9.

En la tarea 2, se evidenció la conexión matemática representaciones diferentes alternas y equivalentes, respecto al concepto función cuadrática, por parte de los futuros profesores. En el mismo registro (representaciones diferentes equivalentes), FP5 y FP6 manifestaron este concepto algebraicamente en tres formas distintas: polinómica ($y = ax^2 + bx + c$ o $y = x^2 + bx + c$, factorizada ($y = (x - x_1)(x - x_2)$ o $y = a(x - x_1)(x - x_2)$) y canónica ($y = a(x - xv^2) + xv$). FP2 también demostró dos formas algebraicas diferentes de ver a las funciones dadas (ver figura 10).

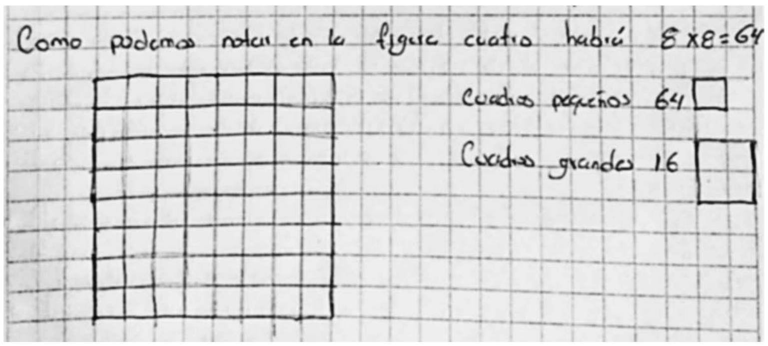


Figura 9. *Representaciones alternas para llegar a un resultado.*
Fuente propia de la investigación.

$$p = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$$
$$q = (x+3)(x-1) = -x^2 - 2x + 3$$

Figura 10. *Representación equivalente de las funciones cuadráticas p y q.*
Fuente propia de la investigación.

$$q = y = ax^2 + bx + c. \qquad p = y = ax^2 + bx + c$$

Figura 11. *Producción de FP7.*
Fuente propia de la investigación.

En las representaciones diferentes alternas FP1, FP2, FP3, FP4, FP7 y FP8 pasaron de las gráficas del problema a una construcción algebraica; por ejemplo, FP1 establece una función específica para cada gráfica, mientas que FP7 indica la forma general de la función cuadrática que puede representar esas graficas o cualquier otra del mismo tipo (figura 11).

En la tarea 3, todos los futuros profesores evidenciaron la conexión matemática representaciones diferentes alternas y equivalentes de la ecuación cuadrática $2x^2 + 10x = 600$, al momento de resolverla, para encontrar las medidas del terreno. En las equivalentes, FP1, FP2, FP3, FP5, FP6, FP7 y FP8 optaron por factorizarla y FP4 buscó una función equivalente a la original que le permitió trabajar con números más pequeños. Además, FP2, FP6, FP7, y FP8 también realizaron la construcción geométrica del terreno y la ecuación que surgió de esta, es decir, generaron representaciones diferentes alternas, como se muestra en la figura 12.

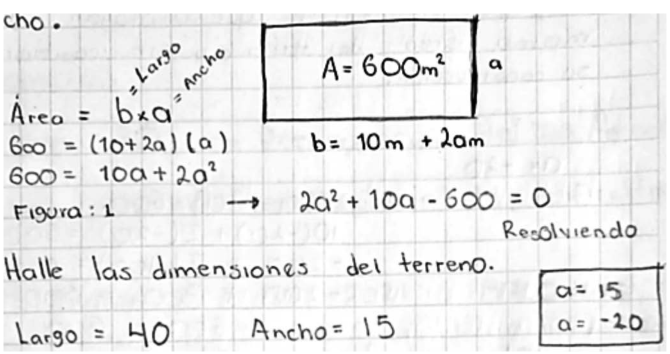


Figura 12. *Representaciones alternas y equivalentes de FP2.*
Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

En las tareas 4 y 5, los datos arrojaron representaciones diferentes solo alternas, respecto al concepto de función cuadrática, en los registros algebraico-gráfico (el que más establecieron (Figura 13) y gráfico-lenguaje natural (realizado por FP2, al relacionar lo que decía la tarea con una gráfica que lo describirá).

Conexión matemática significado

Se esperaba que los futuros profesores establecieran esta conexión matemática en las tareas 2, 3 y 4, pero no todos lo lograron. Esta tipología de significado se manifestó al relacionar el concepto de ecuación y función cuadrática con algo que les diera sentido, en cuanto a lo que es y lo que representa. En esta línea, en la tabla 9 se muestran los subtemas elaborados respecto a la conexión matemática de significado.

Con respecto al concepto de ecuación cuadrática, FP1, FP2 y FP5 evidenciaron darle significado en la tarea 3, enfocada en el trabajo de dicho concepto. FP1 relacionó

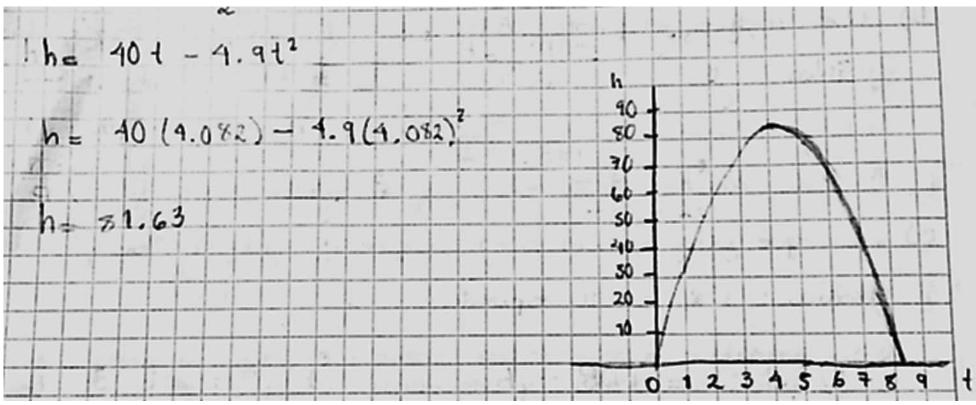


Figura 13. *Representaciones diferentes alternas algebraico-gráfico de FP1.*
Fuente propia de la investigación.

Tabla 9. *Subtemas asociados a la conexión matemática de tipo significado, en cada tarea*

Tarea	Subtema	Futuros profesores
2	La trayectoria del lanzamiento de un balón forma una función cuadrática.	FP1
	La trayectoria del lanzamiento de un balón y del disparo de un proyectil forman una parábola.	FP3
	El comportamiento cuadrático se puede ver en algunos fenómenos de la vida real, como en la trayectoria que recorre un objeto al ser lanzado.	FP6
	El comportamiento de la gráfica de una función cuadrática se puede representar con la trayectoria que se forme al dar un salto.	FP7
3	La superficie de un terreno se obtiene en metros cuadrados.	FP1
	En la vida real no es posible tener una longitud negativa, por eso se toma solo la solución positiva de la ecuación cuadrática.	FP2
	Las medidas de un terreno no pueden ser distancias negativas.	FP5
4	Cuando un objeto toca el piso representa los cortes en eje x de una función cuadrática, es decir $x_1 = o$ y $x_2 = 8.164$.	FP1
	Las raíces de una función cuadrática se observan en el lanzamiento vertical de un objeto cuando este toca el piso.	FP3, FP5, FP6 y FP8
5	Las raíces de una función cuadrática se observan en el lanzamiento vertical de un objeto cuando este toca el piso.	FP1, FP3, FP5, FP6 y FP8

Nota: Fuente propia de la investigación.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

los datos del problema con la vida real, lo que quiere decir que al multiplicar los metros de cada lado del terreno rectangular (el largo por el ancho) se forma una ecuación cuadrática y el resultado de ese procedimiento es la medida de la superficie en m^2. Además, FP2 y FP5 dieron sentido a las dos soluciones arrojadas por la ecuación cuadrática con las medidas o longitudes que puede tener un terreno en contextos reales, es decir, no existe un terreno con medidas negativas (ver figura 14).

Los futuros profesores dieron significado al concepto de función cuadrática en las tareas 2, 4 y 5, al poderla representar o encontrar en situaciones reales. En la tarea 2, FP1, FP6 y FP7 corroboraron en qué situaciones reales se puede apreciar la gráfica de este concepto. En las tareas 4 y 5, FP1, FP3, FP5, FP6 y FP8 manifestaron la ubicación de las raíces de la función cuadrática en el lanzamiento vertical de un objeto.

Conexión matemática parte-todo

La conexión matemática parte-todo se contempló en la tarea 1 y se esperaba que todos los fututos profesores llegaran a la generalización, no obstante, solo cinco la establecieron. En la tabla 10, se muestran los subtemas que surgieron a partir de los datos.

La generalización se logró a través de preguntas respecto a la cantidad de cuadrados que deberían tener primero figuras específicas, después la *n*-ésima-figura. FP1, FP2 y FP3 llegaron a la expresión cuadrática $(2n)^2$; de ellos, FP2 y FP3 redactaron que n corresponde a la posición de las figuras. FP5 y FP6 determinaron la expresión cuadrática $2n$ x $2n$, otra forma de ver la expresión propuesta anteriormente y, por ende, ambas posibilitan llegar al mismo resultado.

Conexión matemática modelado

Esta conexión matemática se esperaba que los futuros profesores la establecieran

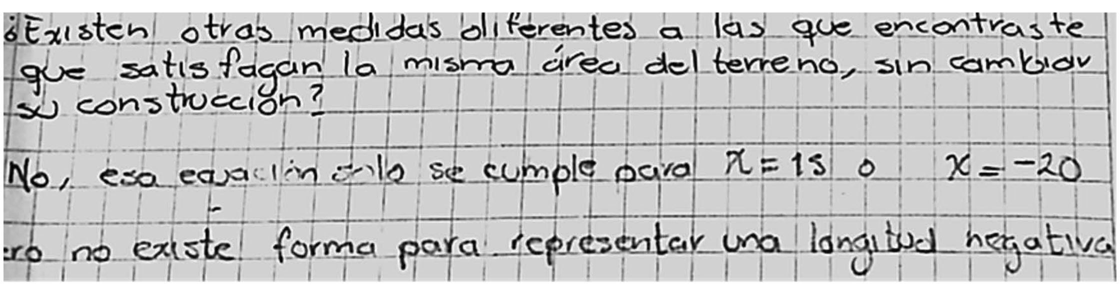

¿Existen otras medidas diferentes a las que encontraste que satisfagan la misma área del terreno, sin cambiar su construcción?
No, esa ecuación sólo se cumple para $x = 15$ o $x = -20$
ro no existe forma para representar una longitud negativa

Figura 14. *Las soluciones de la ecuación cuadrática y el contexto real*.
Fuente propia de la investigación.

Tabla 10. *Subtemas asociados a la conexión matemática parte-todo en una tarea*

Tarea	Subtema	Futuros profesores
1	La expresión $(2n)^2$ permite encontrar el área de n-ésimas figuras.	FP1
	La expresión para obtener la cantidad de cuadrados en cada figura es $(2n)^2$, donde n es la posición de las figuras.	FP2 y FP3
	La expresión $2n$ x $2n$ permite calcular el total de cuadrados para la *n-ésima* figura.	FP5 y FP6

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Tabla 11. *Subtemas asociados a la conexión matemática modelado en una tarea*

Tarea	Subtema	Futuros profesores
3	El modelo matemático $2x^2 + 10x = 600$ o de la forma $x(2x + 10) = 600$ permite encontrar las medidas del terreno.	FP1, FP3, FP7 y FP8
	El modelo matemático $2a^2 + 10a - 600 = 0$ permite encontrar las medidas del terreno.	FP2
	El modelo matemático $2x^2 + 10x = 600$ o de la forma $x^2 + 5x - 300 = 0$ permite encontrar las medidas del terreno.	FP4
	El modelo matemático $600 = a(2a + 10)$ o de la forma $2a^2 + 10a - 600 = 0$ permite encontrar las medidas del terreno.	FP5 y FP6

Nota: Fuente propia de la investigación.

Tabla 12. *Subtemas asociados a la conexión matemática implicación en dos tareas*

Tarea	Subtema	Futuros profesores
4	Si un objeto es lanzado (o se cae), entonces la aceleración se conserva.	FP1
5	Si un objeto lanzado verticalmente alcanza la altura máxima, entonces su velocidad es cero.	FP3

Nota: Fuente propia de la investigación.

en la tarea 3 y se logró con éxito, al construir un modelo matemático que les condujera a obtener las medidas de un terreno rectangular. En la tabla 11, se muestran los subtemas que surgieron de los datos y que pertenecen a la conexión matemática modelado.

Algunos modelos matemáticos establecidos por los futuros profesores diferían en la letra que asignaban a la ecuación cuadrática; incluso, la mayoría, a excepción de FP2, la transformaron a una que les dejara llegar con facilidad al valor de la incógnita, como el caso de FP2, FP3, FP5, FP6, FP7 y FP8, quienes optaron por factorizarla, y FP4 fue el único que la transformó a una ecuación cuadrática equivalente, al dividirla entre 2. Sin importar esto, todos lograron obtener un resultado correcto, pues se trataba de la misma ecuación cuadrática.

Conexión matemática implicación

Esta conexión matemática se esperaba que los futuros profesores la establecieran en las tareas 4 y 5, sin embargo, no fue así. Las implicaciones que surgen en esta tarea se derivan de algunos conocimientos de la disciplina de física, como lo muestran los subtemas de la tabla 12.

Las implicaciones son respecto al lanzamiento vertical de un objeto, en las que resaltan aspectos importantes en situaciones de la vida real. Estas surgieron en la resolución de la tarea, como se muestra en los siguientes extractos:

Entrevistador: ¿Qué respondiste en el inciso B? ¿En qué tiempo el objeto vuelve a tocar el piso?

FP1: En el lanzamiento vertical, cuando el objeto sube o baja, la aceleración se conserva, por lo tanto, la gráfica es simétrica, por ello, el objeto vuelve a tocar el piso en 8.164 *s*.

Entrevistador: Y, ¿qué respondiste en el inciso a? ¿En qué tiempo (minutos/segundo) el objeto toca el piso?

FP3: En 1.02 s […] además cuando la pelota alcanza la altura máxima la velocidad es cero […]

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Discusión y conclusiones

El objetivo de este artículo fue identificar las conexiones matemáticas que establecían ocho futuros profesores, al resolver tareas asociadas al concepto de ecuación cuadrática. Para ello, se recolectó información, a través de la entrevista de grupo focal. El análisis de los datos evidenció que los futuros docentes establecen conexiones matemáticas de diferentes tipos: característica, significado, procedimental, representaciones diferentes e implicación, no obstante, la mayoría no logró emplear las conexiones previstas en cada tarea. FP1 utilizó la mayor cantidad de conexiones matemáticas; la única conexión que no usó fue la de implicación contemplada en la tarea 5, pero, en las demás, desarrolló el concepto y lo trabajó de una manera apropiada, logrando establecer conexiones de tipo: característica, significado, modelado, procedimental, parte-todo y representaciones diferentes. Así, podemos inferir, desde el marco teórico, que comprende el concepto y puede relacionarlo tanto con otras disciplinas como con situaciones de la vida real.

También, el análisis de los datos mostró que los futuros profesores participantes fueron capaces de establecer conexiones intramatemáticas en el concepto de ecuación cuadrática, al relacionarlo con otros conceptos como función cuadrática, polinomios y factorización, con métodos de soluciones o representaciones alternas o equivalentes. En este sentido, las conexiones matemáticas que más pusieron en práctica los futuros profesores de esta investigación fueron representaciones diferentes y procedimental, seguidas de característica y significado. Estos resultados son consistentes con los reportados por García-García y Dolores-Flores (2018, 2021b), Dolores y García-García (2017), Dolores-Flores *et al*. (2019) respecto a conceptos matemáticos abordados en el cálculo, en estudiantes y docentes.

Algunas conexiones intramatemáticas surgieron a partir de la forma de la ecuación cuadrática (completa o incompleta). Por ejemplo, la tarea 3 se enfocó en el trabajo de la ecuación cuadrática completa y, en las producciones de los participantes, se evidenció que la mayoría tiene buen manejo sobre esta. En las tareas 4 y 5, se les proporcionó la ecuación $h = v_o t \pm \frac{9.8t^2}{2}$, que pertenece a una ecuación cuadrática mixta de la forma $ax^2 + bx = 0$, sin embargo, al estar representada con otras variables, con una forma distinta a la que se trabaja en matemáticas y dado que se requería procedimientos algebraicos para llegar a una ecuación cuadrática mixta, solamente tres futuros profesores (FP1, FP2 y FP7) se ocuparon de dicha ecuación y la resolvieron.

Además, los resultados evidencian lo reportado por López *et al*. (2016), quienes afirman que cuando se trabaja la ecuación cuadrática una de las principales dificultades es realizar operaciones algebraicas y aritméticas (conexión procedimental), pues, al desarrollarlas de forma errónea, es imposible llegar a un resultado correcto y alcanzar el dominio conceptual de dicha ecuación. Este fue el caso de FP7, quien, por un error aritmético en el procedimiento, una de las soluciones que encontró no satisfacía la ecuación cuadrática con la que estaba trabajando en la tarea 3.

Las conexiones matemáticas de menor frecuencia fueron de tipo parte-todo, lo cual coincide con Dolores-Flores *et al.* (2019); modelado, al vincular las matemáticas con contextos de la vida real (Dolores y García-García, 2017); e implicación, que fue establecida solo por dos futuros profesores, lo que podría deberse a que se necesita

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

tener algunos conocimientos de física para realizar implicaciones de la matemática con dicha disciplina. Otro concepto matemático trabajado en algunas tareas fue el de función cuadrática, cuando los futuros profesores se valieron de diferentes conexiones matemáticas, evidenciando que dominan tal concepto y dándole significado en contextos de aplicación. Asimismo, determinaron diversas formas de ver la función cuadrática en el registro algebraico y gráfico.

Cabe resaltar que las conexiones matemáticas características, procedimental, representaciones diferentes, modelado, parte-todo y significado, contempladas en las tareas para ser desarrolladas por los futuros profesores, están presentes en los planes y programas de estudio mexicanos de nivel secundaria y medio superior, reportados en García-García *et al*. (2022). Esto lleva a considerar que, en secundaria y bachillerato, se debe procurar tareas que, como las propuestas en esta investigación, implementen conexiones matemáticas en los estudiantes y, con ello, la comprensión matemática.

Este estudio aporta tareas ricas para promover conexiones matemáticas respecto a los conceptos ecuación y función cuadrática, que pueden ser útiles cuando se llevan al aula de clases con estudiantes de bachillerato o secundaria. Además, estas podrían ayudar al diseño de otras tareas que permitan vincular ambos conceptos, esenciales en matemáticas.

Como lo menciona García-García (2019), se considera importante que los futuros profesores y aquellos en servicio establezcan conexiones matemáticas, para que logren promoverlas en el aula de clases y, de esta manera, desarrollen la comprensión matemática en los estudiantes. Por esta razón, en investigaciones futuras se puede explorar:

- El efecto que tendría instar al uso de las conexiones matemáticas a través de experimentos de enseñanza, para desarrollar la comprensión conceptual en distintos contenidos matemáticos.
- Las conexiones matemáticas que promueven los profesores en el concepto de la ecuación cuadrática, para comparar con los resultados de esta investigación.
- Las conexiones matemáticas que establecen profesores o estudiantes, al resolver las tareas propuestas en esta investigación.

Finalmente, algunas limitantes de este trabajo, por tener en cuenta para investigaciones posteriores son que, a pesar de que la entrevista de grupo focal permitió recabar información, las explicaciones dadas por los futuros profesores pudieron ser mejoradas al escuchar la participación de sus demás compañeros. Otra cuestión va directamente relacionada con la pandemia de COVID-19, pues nos llevó a tener datos de mala calidad, porque, dadas las condiciones, no pudimos exigir que las tareas fueran mejor escaneadas. Con respecto a las tareas 4 y 5, al ser muy parecidas, algunos futuros docentes dieron muy poca información, tanto escrita como verbal, de cómo solucionaron la 5, por lo que se recomienda, en aplicaciones venideras, cambiar una de las dos tareas o considerar solo una. Por último, no vincular la matemática con otras disciplinas o contextos reales impidió a algunos futuros profesores trabajar y darle significado al concepto en cuestión; de aquí la importancia de promover las conexiones matemáticas en el ámbito escolar.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Agradecimiento

Agradecemos a los futuros profesores que voluntariamente participaron en esta investigación.

Consentimiento informado

Los futuros profesores en esta investigación participaron voluntariamente y consintieron el uso de sus respuestas para fines educativos y no económicos.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leímos y aprobamos la versión final de este artículo. El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: M.E.H.Y. 40 %, J.G.G. 30 % y K.G.C.M. 30 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [J.G.G], previa solicitud razonable.

Referencias

Aguilar, S. y Barroso, O. (2015). La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa. *Pixel-bit. Revista de medios y educación*, (47), 73-88.

Braun, V. and Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V. and Clarke, V. (2012). *Thematic analysis.* In H. Cooper (ed.), *Handbook of research methods in psychology* (pp. 57-71), Washington (DC): American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620-004

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. [Unpublished PhD thesis]. Faculty of Education-Simon Fraser University, Canada.

Didis, M. (2018). Secondary School Students' Conception of Quadratic Equations with One Unknown. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *19*(1), 112-129.

Didis, M. G. and Erbas, A. K. (2015). Performance and difficulties of students in formulating and solving quadratic equations with one unknown. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *15*(4), 1137-1150.

Dolores-Flores, C. y García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *31*(57), 158-180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., and García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 369-389. http://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050

Dörnyei, Z. (2007). *Research Methods in Applied Linguistics: quantitative, qualitative, and mixed methodologies.* Oxford University Press.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., and Lee, C. W. (2011). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics*, *113*(3), 120-134. https://doi.org/10.1111/ssm.12009

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula*. [Unpublished dissertation]. Pennsylvania State University College of Education, United States of America.

García-García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *4* (100), 129-133.

García-García, J. and Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus task. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227-252. DOI: 10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J. and Dolores-Flores, C. (2021a). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, *33*, 1-22. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

García-García, J. and Dolores-Flores, C. (2021b). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(6), 912-936. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429

García-García, J., Hernández-Yañez, M. E. y Rivera López, M. I. (2022). Conexiones matemáticas promovidas en los planes y programas de estudio mexicanos de nivel secundaria y media superior sobre el concepto de ecuación cuadrática. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 13, e1485. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech

Garza, B. (2014). *Álgebra*. Pearson.

Gibson, F. (2007). Conducting focus groups with children and young people: strategies for success. *Journal of research in nursing*, *12*(5), 473-483. https://doi.org/10.1177/1744987107079791

Guner, P. (2017). High school students' achievement of solving quadratic equations. *Bartin University Journal of Faculty Education*, *6*(2), 447-467.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/ Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kotsopoulos, D. (2007). Unravelling student challenges with quadratics: A cognitive approach. *Australian Mathematics Teacher*, *63*(2), 19-24.

Krueger, R. (2006). Is it a focus group? Tips on how to tell. *Journal of Wound Ostomy & Continence Nursing*, *33*(4), 363-366. https://doi.org/10.1097/00152192-200607000-00003

Lau, W. W. (2019). Pre-service mathematics teachers' professional learning in a pedagogy course: Examining changes in beliefs and confidence in teaching algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 1-17. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00285-y

López, J., Robles, I., and Martínez-Planell, R. (2016). Students' understanding of quadratic equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(4), 552-572. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1119895

Martínez, R. N. R. (2012). Reseña metodológica sobre los grupos focales. *Diá-Logos*, (9), 47-53. https://doi.org/10.5377/dialogos.v1i9.1565

McCarthy, J. (2020). Solving quadratic equations activity & revisions. *Ohio Journal of School Mathematics*, *84*(1), 71-90.

McDermott, M. J. (2013). Take your pick, *ANA Magazine*, 32-42.

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B., and Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 201-227. https://doi.org/10.1080/10986065.2013.794322

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all.* United State of America.

Polit, D. and Beck C. (2006). *Essentials of nursing research: methods, appraisal and utilization.* Philadelphia, USA: Lippincott Williams and Wilkins.

Rodas, F. y Pacheco, V. (2020). Grupos focales: marco de referencia para su implementación. *INNOVA Research Journal*, *5*(3), 182-195. I: https://doi.org/10.33890/innova.v5.n3.2020.1401

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., and García-García, J. (2021). Pre-service mathematics teachers' mathematical connections in the context of problem-solving about the derivative. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 12*(1), 202-220. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.797182

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Steketee, S. and Scher, D. (2016). Connecting functions in Geometry and Algebra. *Mathematics Teacher*, *109*(6), 448-455. https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.6.0448

Stewart, D. and Shamdasani, P. (2015). *Focus groups: Theory and practice.* Sage publications.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-26. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr