Uniciencia Vol. 37(1), pp. 1-24, January-December, 2023
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470

Creación de problemas de proporcionalidad en la formación de docentes de primaria

Creation of proportionality problems for the training of prospective primary school teachers

Criação de problemas de proporcionalidade na formação de professores primários

María Burgos[1]*, Jorhan Chaverri Hernández[2]

Received: Jun/21/2022 • Accepted: Mar/9/2023 • Published: Jun/1/2023

Resumen

[Objetivo] El objetivo de este artículo es describir y analizar una intervención formativa con futuro personal docente de primaria, dirigida a desarrollar la competencia para crear problemas de proporcionalidad mediante la variación de un problema inicial y la elaboración a partir de un requerimiento didáctico-matemático. **[Metodología]** Se trata de un estudio cualitativo e interpretativo que adopta una metodología propia de las investigaciones de diseño o ingeniería didáctica. Tanto en el diseño de la intervención, como en el análisis de contenido de las respuestas de los sujetos participantes se emplean herramientas teóricas y metodológicas del enfoque ontosemiótico. Se trabaja con un grupo de 127 estudiantes para docentes de Educación Primaria de la Universidad de Granada, España; organizados en 33 equipos para responder a dos consignas sobre creación de problemas. **[Resultados]** Los resultados muestran que los sujetos participantes crean con mayor frecuencia problemas pertinentes mediante la variación de un problema dado, pero que no logran crear problemas que permitan, de manera específica, distinguir situaciones proporcionales de aditivas a partir de un requerimiento didáctico-matemático. **[Conclusiones]** Se concluye que los futuros maestros y maestras manifiestan un conocimiento didáctico y matemático insuficiente para crear problemas de proporcionalidad exitosamente. Por esto es necesario que los programas de formación refuercen las estrategias para desarrollar esta tarea, incorporándola como recurso didáctico en el proceso de enseñanza, y mejorando la competencia para el análisis de la actividad matemática del futuro profesorado.

Palabras clave: Creación de problemas; proporcionalidad; conocimiento didáctico-matemático; formación de docentes.

* Autor para correspondencia
María Burgos, mariaburgos@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4598-7684
Jorhan Chaverri Hernández, jorhan2009@hotmail.com, http://orcid.org/0000-0003-3504-5308
1 Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.
2 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

[Objective] This article presents a description and analysis of an educational experience with prospective primary school teachers, aimed at developing their skills to create proportionality problems by modifying an initial problem to reflect a didactic-mathematical orientation. **[Methodology]** This is a qualitative and interpretative investigation that adopted an engineering or design approach to teaching in its research methodology. Theoretical and methodological tools of the Onto-semiotic Approach were used in both the design of the experience, and in the content analysis of participants' responses. The investigation was carried out with a group of 127 Primary Education students of the University of Granada, Spain, organized in 33 teams to answer two problem-creation tasks. **[Results]** It was found that the participants most frequently created relevant problems by modifying a given problem, but that they did not manage to create problems that specifically allowed them to distinguish proportional from additive situations that are consistent with didactic-mathematical requirements. **[Conclusions]** Prospective teachers did not display sufficient didactic and mathematical knowledge to be able to successfully create proportionality problems. Training programs should therefore strengthen their strategies to develop this knowledge, incorporating it as a didactic resource in the teaching process to assist in improving the skills of prospective teachers in the analysis of mathematical activities.

Keywords: Problem creation, proportionality, didactic-mathematical knowledge, teacher education.

Resumo

[Objetivo] Este artigo tem como objetivo descrever e analisar uma intervenção formativa com futuros professores do ensino básico, destinada a desenvolver a competência para criar problemas de proporcionalidade por variação de um problema inicial e elaboração com base num requisito didático-matemático. **[Metodologia]** Este é um estudo qualitativo e interpretativo que adota uma metodologia própria das pesquisas de desenho ou engenharia didática. Tanto no desenho da intervenção como na análise de conteúdo das respostas dos sujeitos participantes são utilizados instrumentos teóricos e metodológicos da abordagem ontossemiótica. Trabalha-se com um grupo de 127 alunos para professores do Ensino Primário da Universidade de Granada, Espanha; organizados em 33 equipes para responder a duas instruções sobre a criação de problemas. **[Resultados]** Os resultados mostram que os sujeitos participantes criam com mais frequência problemas pertinentes ao variar um determinado problema, mas não conseguem criar problemas que permitam, de forma específica, distinguir situações proporcionais de aditivas a partir de uma exigência didático-matemática. **[Conclusões]** Conclui-se que os futuros professores apresentam conhecimentos didáticos e matemáticos insuficientes para criar com sucesso problemas de proporcionalidade. Por essa razão, é necessário que os programas de formação reforcem as estratégias para desenvolver esta tarefa, incorporando-a como recurso didático no processo de ensino e melhorando a competência para a análise da atividade matemática dos futuros professores.

Palavras-chave: criação de problemas, proporcionalidade, conhecimento didático-matemático, formação de professores.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Introducción

Diversos currículos de matemáticas consideran la resolución de problemas como una estrategia metodológica en el proceso de enseñanza, lo que justifica que se haya convertido en tema de interés consolidado en la investigación dentro de la educación matemática (Espinoza, 2017; Ministerio de Educación Pública, 2012; Moreno *et al*., 2015).

Aunque en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas el desarrollo de competencias para la resolución de problemas se ha situado en el centro de la práctica educativa, investigaciones recientes sugieren incorporar la creación de problemas como habilidad complementaria en los procesos instruccionales (Pino-Fan *et al*., 2020; Silver, 2013). Esta competencia no solo mejora la capacidad para resolver problemas, sino que incrementa la motivación y acerca las matemáticas al estudiantado mediante una sensación de creación propia (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2014; Mallart, Font y Diez, 2018; Silver, 2013; Tichá y Hošpesová, 2013). Además, constituye un recurso potente para desarrollar y evaluar el aprendizaje de las matemáticas, dado que requiere dominio del lenguaje, conceptos, procedimientos y procesos matemáticos involucrados (Ayllón, Gallego y Gómez, 2016; Fernández-Millán y Molina, 2016; Kwek, 2015).

Las investigaciones sobre creación de problemas de matemáticas con propósitos didácticos mencionan, de manera explícita, su vínculo con las competencias docentes y señalan la importancia de incluir la invención de problemas en los programas de formación de profesorado (Ellerton, 2013; Espinoza *et al*., 2014; Malaspina, 2016; Mallart *et al*., 2018; Milinković, 2015; Silver, 2013; Tichá y Hošpesová, 2013). El personal docente, además de resolver problemas, debe ser capaz de modificarlos o crearlos con una finalidad didáctica (facilitar o profundizar en el aprendizaje de sus estudiantes y estimular su razonamiento matemático), así como de evaluar críticamente la calidad de la actividad matemática que promueven (Malaspina, Mallart y Font, 2015; Malaspina, Torres y Rubio, 2019). Sin embargo, incluso docentes con años de experiencia tienen dificultades para proponer problemas relevantes para el aprendizaje de sus estudiantes, plantean enunciados que no están adaptados al nivel educativo, son incorrectos o incompletos, y mayoritariamente en un contexto exclusivamente intra-matemático (Singer y Voica, 2013).

Incorporar la creación de problemas en la formación de profesorado supone desarrollar herramientas teórico-metodológicas que lo guíe en una tarea compleja que no ha recibido la atención suficiente (Ellerton, 2013; Mallart *et al*., 2018). Se trata, en primer lugar, de elaborar instrumentos para orientar el análisis, la selección, modificación y planteamiento de problemas para responder a determinados requerimientos matemáticos o didácticos. En segundo lugar, supone planificar y llevar a la práctica estrategias formativas en las que la creación de problemas aparezca como recurso para involucrar a los futuros cuerpos docentes en actividades de aprendizaje auténticas que fomenten una comprensión sólida de los contenidos matemáticos (Singer, Ellerton y Cai, 2013).

En nuestro caso, centramos la atención en la proporcionalidad. A pesar del gran número de aplicaciones del razonamiento proporcional en diferentes contextos (Balderas, Block y Guerra, 2014; Lundberg, 2011), así como de su "papel primordial en el desarrollo de las ideas matemáticas del

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

estudiante” (Mochón, 2012, p. 134), diversas investigaciones señalan la limitada comprensión de la razón y proporción, así como las dificultades para enseñar las nociones fundamentales de la proporcionalidad que muestran tanto docentes en formación inicial como en servicio (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012; Balderas *et al*., 2014; Buforn, Llinares y Fernández, 2018; Burgos y Godino, 2021; Riley, 2010; Rivas, Godino y Castro, 2012; entre otras). En particular, el profesorado encuentra limitaciones para diferenciar situaciones proporcionales de otras que no lo son (Fernández, Llinares y Valls, 2012). Por un lado, el conocimiento insuficiente del contenido matemático, en nuestro caso la proporcionalidad, limita su capacidad para crear problemas pertinentes; pero, por otro, dicho conocimiento no es suficiente para que formulen problemas que respondan a determinados requerimientos matemáticos o didácticos (Burgos y Godino, 2021; Rivas *et al*., 2012).

Creación de problemas

La creación de problemas se considera, desde hace algunas décadas, una herramienta de investigación y enseñanza en la educación matemática (Singer *et al*., 2013). En dicho proceso, el estudiantado construye interpretaciones personales de situaciones concretas a partir de su propia experiencia matemática, y las formulan en términos de problemas matemáticos significativos (Bonotto, 2013; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2016; Koichu y Kontorovich, 2013; Stoyanova y Ellerton, 1996). El carácter “significativo” de un problema viene dado por cualidades como simplicidad, brevedad, claridad, elegancia, utilidad, profundidad y complejidad matemática, ingenio, exigencia cognitiva, novedad y sorpresa, que deben ser reconocidas como tales por quien lo inventa o resuelve (Koichu y Kontorovich, 2013). De acuerdo con Bonotto (2013):

> La creación de problemas, por lo tanto, se convierte en una oportunidad para la interpretación y el análisis crítico de la realidad, ya que: (1) los estudiantes tienen que discernir los datos significativos de los irrelevantes; (2) deben descubrir las relaciones entre los datos; (3) deben decidir si la información que poseen es suficiente para resolver el problema; y (4) tienen que investigar si los datos implicados son numérica y/o contextualmente coherentes. (p. 40)

Para Stoyanova y Ellerton (1996), los procesos de planteamiento de problemas pueden realizarse desde tres categorías diferentes: libre, donde estudiantes formulan problemas sin ninguna restricción sobre la situación general, con base en sus experiencias dentro y fuera del aula de matemáticas (Serin, 2019); semiestructurada, en la que se brinda a estudiantes una situación abierta y se les invita a explorar la estructura de esta situación y a completarla utilizando los conocimientos, las habilidades y las relaciones derivadas de experiencias matemáticas anteriores (es frecuente el uso de representaciones visuales, gráficos, tablas, historias verbales abiertas, o representaciones simbólicas) (Serin, 2019); estructurada, donde se crean problemas mediante la variación de la estructura, las condiciones o las preguntas de problemas dados o resueltos (Serin, 2019). Basándose en el modelo de Stoyanova y Ellerton (1996); Christou *et al*., (2005), estudian los procesos involucrados en la creación de problemas y los clasifican en cuatro categorías crecientes en complejidad: edición (creación de problemas sin restricción a partir de la información, historia o indicaciones

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470

dadas), selección (formulación de problemas que se ajustan a respuestas específicas dadas que actúan como restricción) comprensión (en base a cálculos matemáticos o ecuaciones dadas) y traducción de la información (creación de problemas a partir de gráficos, diagramas o tablas). Posteriormente, Kiliç (2013) propuso un modelo de planteamiento de problemas en el que combina las clasificaciones propuestas por Stoyanova y Ellerton (1996) y Christou *et al*. (2005): creación libre de problemas, donde se pide que se plantee un problema difícil o un problema específico; semiestructurada, que implica editar y traducir y estructurada, que involucra procesos de comprensión y selección.

Para que el profesorado pueda diseñar actividades de invención de problemas adecuadas para sus estudiantes y gestionar las dificultades en dicha tarea, también debe estar capacitado para plantear problemas (Singer *et al*., 2013). Sin embargo, su formación no ha prestado la atención suficiente a la creación de problemas matemáticos (Ellerton, 2013, Xie y Masingila, 2017). Se observa que el profesorado en formación propone problemas muy sencillos, con enunciados ambiguos y desvinculados de la realidad de sus estudiantes (Mallart *et al*., 2018; Serin, 2019). Además, al crear más de un problema utiliza una estructura similar al problema inicial, lo que muestra falta de creatividad (Tichá y Hošpesová, 2013; Xie y Masingila, 2017).

En el caso concreto de la proporcionalidad, Şengül y Katranci (2015a, 2015b) investigan cómo futuro personal docente crea problemas sobre razón y proporción mediante los métodos libre, semiestructurado y estructurado. De manera general, los sujetos participantes proponen enunciados de tipo ejercicio, comprensibles y que admiten solución (Sengül y Katranci, 2015a), pero muestran su preocupación por no crear problemas adecuados al nivel de enseñanza media. Aparecieron dificultades fundamentalmente en la creación de forma libre (Sengül y Katranci, 2015a), debido a la falta de experiencia o de formación sobre la invención de problemas, el conocimiento limitado de los contenidos (Sengül y Katranci, 2015a, 2015b), la dificultad para escribir el texto de los problemas y el desconocimiento de los niveles cognitivos de estudiantes o el programa curricular (Sengül y Katranci, 2015b). Atendiendo a las carencias expresadas por los propios sujetos participantes, los estudios recomiendan fomentar el estudio de la resolución y creación de problemas y desarrollar métodos y recursos específicos de formación sobre creación de problemas.

En el contexto del EOS, Burgos *et al.* (2018); Burgos y Godino (2021, 2022) emplean la creación de problemas como recurso para analizar y desarrollar los conocimientos didáctico-matemáticos de futuro personal docente (de primaria y secundaria) en proporcionalidad. Partiendo de la conexión entre razonamiento proporcional y algebraico, proponen a estos grupos docentes crear nuevos problemas a partir de uno dado de manera que se modifique el nivel de razonamiento algebraico, es decir, de generalidad y formalización, involucrado en su solución. Los resultados muestran que dicha tarea es compleja para el futuros profesorado, que en gran medida crea problemas demasiado alejados del original, no son significativos o no involucran el razonamiento proporcional. Aun teniendo en cuenta la dificultad intrínseca al requerimiento explícito (el nivel de razonamiento algebraico implicado) las limitaciones encontradas en la formulación de enunciados pertinentes por el futuro profesorado, lleva a concluir que es necesaria una mayor formación específica en la creación de problemas (Burgos y Godino, 2022).

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470

Marco teórico

Dado que el foco de interés de nuestra investigación es la formación de profesorado de matemáticas, es preciso especificar el modelo de conocimientos y competencias profesionales que asumimos. En nuestro caso, adoptamos el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) del profesorado de matemáticas propuesto en el marco del EOS (Godino *et al*., 2017).

Modelo de conocimiento y competencias del profesor de matemáticas

Desde el modelo CCDM (Godino *et al*., 2017) se asume que el profesorado debe disponer de un *conocimiento matemático per se*, que le permita resolver las situaciones-problemas propias del nivel educativo en el que imparte sus clases, y articularlo con los niveles superiores. Pero, a medida que aparezca involucrado algún contenido matemático, el profesorado debe disponer de un *conocimiento didáctico-matemático* de las distintas facetas que afectan el proceso educativo: *epistémica* (cómo conoce y comprende las matemáticas el profesorado), *cognitiva* (cómo el estudiantado entiende, razona y aprende, razona las matemáticas y de qué manera progresa en su aprendizaje), *afectiva* (conocimientos referentes al afecto, emociones, actitudes de estudiantes y sus creencias sobre los objetos matemáticos y su estudio), *mediacional* (conocimiento de los recursos materiales, físicos o tecnológicos, y temporales), *interaccional* (cómo se produce la enseñanza de las matemáticas, cómo deben organizarse las tareas y las interacciones en el aula para progresar en el aprendizaje y resolver los conflictos), *ecológica* (conocimiento de las conexiones del contenido matemático con otras disciplinas y cómo la instrucción matemática se ve afectada por factores curriculares, socio-profesionales, etc.).

En el modelo CCDM se articulan, de manera natural, las competencias y conocimientos didácticos. En efecto, las prácticas matemáticas y didácticas se entienden como acciones que lleva a cabo un sujeto para resolver una situación-problema o afrontar una tarea. Las prácticas de tipo discursivo-declarativo indican la disposición de conocimientos, mientras que aquellas de carácter operatorio-procedimental muestran la posesión de una capacidad o competencia, de manera que la realización competente de prácticas operatorias implica la puesta en juego de conocimientos de tipo declarativo (Godino *et al*., 2017). Así, el profesor o profesora debe disponer de dos competencias clave: la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica* que, en esencia, consiste en “diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora” (Breda, Pino-Fan y Font, 2017, p. 1897). Esta competencia global del profesorado de matemáticas está articulada por medio de cinco subcompetencias, asociadas a las herramientas conceptuales y metodológicas del EOS: *competencia de análisis de significados globales* (identificación de situaciones-problemas y prácticas de tipo operativo o discursivo implicadas en su resolución); *competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas* (reconocimiento de la estructura de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas); *competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas* (descripción y

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

secuenciación de los patrones de interacción entre docente, estudiantes, contenidos y recursos); *competencia de análisis normativo* (identificación de la red de normas y metanormas que condicionan y fundamentan el proceso instruccional); *competencia de análisis de la idoneidad didáctica* (evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje y propuesta de mejoras).

De manera específica, el profesorado de matemáticas debe ser competente para a) identificar la diversidad de prácticas, objetos y procesos que se ponen en juego ante una tarea concreta (faceta epistémica); b) resolver la tarea empleando distintos procedimientos y mostrando diversas justificaciones (faceta instruccional); c) modificarla atendiendo a ciertas finalidades didácticas y los conocimientos y dificultades que encuentre o pueda encontrar el alumnado (facetas instruccional y cognitiva) (Godino *et al*., 2017). Así, la creación de problemas constituye una parte esencial de la competencia del profesorado de matemáticas, en tanto posibilita adecuar las situaciones-problemas a las necesidades estudiantiles, fomenta su creatividad y flexibilidad, y contribuye a reforzar e interconectar los conocimientos matemáticos y didácticos sobre el contenido.

Propuestas de creación de problemas en la formación del profesorado

A pesar de que existen diferentes propuestas de estrategias o metodologías para guiar la creación de problemas (Contreras, 2007; Espinoza *et al*., 2016; Kiliç, 2013; Şengül y Katranci, 2015a; Serin, 2019; Stoyanova y Ellerton, 1996), en este trabajo adoptamos la propuesta desarrollada por Malaspina y colaboradores (Malaspina, 2016; Malaspina *et al*., 2015; Malaspina *et al*., 2019). De acuerdo con Malaspina (2016), la creación de problemas es un proceso por el que se obtiene un nuevo problema, el cual está determinado por cuatro elementos fundamentales: la *información*, es decir, los datos cuantitativos o relacionales dados en el problema; el *requerimiento,* esto es, lo que se pide (cuantitativo o cualitativo) que se halle, analice o demuestre; el *contexto*, que puede ser intra o extra matemático; el *entorno matemático* en el que se encuentran los conceptos y propiedades matemáticas que intervienen o pueden hacerlo para resolver el problema, por ejemplo: aritmética, funciones lineales, geometría analítica, probabilidad, etc.

Según Malaspina (2016), la creación de nuevos problemas puede darse esencialmente por dos procesos: variación y elaboración. En la *variación de un problema* se crea un nuevo problema modificando uno o más (pero no todos) de los cuatro elementos del problema inicial. Por otro lado, en la *elaboración* de un problema se crea un nuevo problema bien *de forma libre*, *a partir de una situación* (dada o configurada por el autor o autora), o bien, *para responder a un requerimiento específico* que puede tener énfasis matemático o didáctico. En la elaboración de un problema a partir de una situación, el contexto se origina en la situación, la información se obtiene por selección o por modificación de la que se percibe en tal situación, el requerimiento es una consecuencia de las relaciones entre los elementos de la información implícita en el enunciado y el entorno matemático se puede determinar por el autor o autora o por las formas de resolver el problema. En la elaboración a partir de un requerimiento específico (matemático o didáctico), el contexto o la información debe establecerse para responder de manera adecuada a dicho requerimiento.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Objetivo de investigación

Teniendo en cuenta la importancia de la creación de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las deficiencias que encuentra el futuro profesorado en su uso como herramienta didáctica, el objetivo de nuestra investigación es describir el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa con futuro personal docente de primaria, centrada en la creación de problemas de proporcionalidad con fines didácticos, donde la creación de problemas no es solo el objeto o motivo de la acción formativa, sino un medio para valorar y desarrollar conocimientos didáctico-matemáticos relativos al razonamiento proporcional. En el diseño se sigue el esquema desarrollado por Malaspina (2016).

Metodología

El estudio se enmarca en una investigación descriptiva de enfoque mixto (cualitativa y cuantitativa). Teniendo en cuenta el problema de investigación, el marco metodológico será la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino *et al*., 2014) que sigue las fases propias de las investigaciones de diseño: *estudio preliminar* (estudio de los referentes sobre creación de problemas y conocimientos didáctico-matemáticos en relación con la proporcionalidad que requiere el futuro personal docente para plantear problemas pertinentes; análisis de los recursos técnicos y temporales previstos), *diseño de la trayectoria didáctica* (selección, secuenciación y análisis a priori de los problemas, planificación de intervenciones controladas por la parte docente), *implementación* de la trayectoria didáctica (observación de las interacciones entre personas, recursos y evaluación de los aprendizajes logrados), *análisis retrospectivo* (confrontación entre lo previsto en el diseño y lo observado como resultado de su implementación). Además, se emplea el análisis de contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2018) para examinar los protocolos de respuesta de estudiantes para docentes de primaria que intervinieron en la experiencia formativa. A continuación, se describen el contexto de la investigación y su diseño, prestando atención a la selección y análisis a priori de las tareas propuestas a las personas participantes.

Contexto y participantes

La acción formativa se llevó a cabo con un grupo de 127 estudiantes para maestro de Educación Primaria (EPM en adelante), en el marco de la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Educación Primaria (sexto semestre) en la Universidad de Granada (España).

Los sujetos participantes habían estudiado la proporcionalidad como parte de los contenidos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria durante su primer semestre de formación universitaria. En esta asignatura se espera que EPM lleguen a conocer y articular los principales conceptos, procedimientos y sus propiedades en los diferentes temas de las matemáticas de Educación Primaria y sean capaces de enunciar y resolver problemas matemáticos de manera flexible en una variedad de situaciones y contextos, comunicando de forma eficaz argumentaciones matemáticas. En la asignatura de segundo (cuarto semestre) el estudiantado recibió formación específica sobre los fundamentos de la didáctica de las matemáticas tanto en aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), como instruccionales (tareas y actividades, materiales y recursos). En la

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470

asignatura en la que se desarrolla la experiencia, EPM deben profundizar y emplear los conocimientos adquiridos en los cursos previos para fundamentar, diseñar y valorar unidades didácticas. En particular, uno de los focos fundamentales de la asignatura es el análisis, diseño y secuenciación de tareas matemáticas de acuerdo con unas expectativas y contenidos de aprendizaje específicos.

Diseño e implementación de la intervención

La intervención formativa se desarrolló en cuatro sesiones (de dos horas cada una). En la primera sesión teórica se presentaron los elementos que guían el análisis y diseño de tareas matemáticas: el contenido a estudiar (prácticas y objetos matemáticos, significados, contextos), la finalidad y las posibles limitaciones (dificultades y errores). Se emplearon algunas tareas de proporcionalidad para ejemplificar su análisis, recordando los aspectos que generan mayores dificultades y errores: la relación de divisibilidad o no entre los números involucrados, que aparezcan razones no siempre enteras, las unidades de las magnitudes implicadas, la familiaridad con el contenido, el formato en que se presenta la tarea, por ejemplo, dónde se sitúa el valor desconocido en una situación de valor faltante, o discernir comparaciones multiplicativas de aditivas (Fernández y Llinares, 2011, 2012; Van Dooren *et al*., 2008).

En la segunda sesión, de carácter práctico, EPM trabajaron en equipos sobre el análisis de una tarea matemática de proporcionalidad con base en los elementos mencionados. En la tercera sesión (teórica) se presentó el modelo de creación de problemas de Malaspina (2016), mostrando ejemplos de variación y elaboración de problemas, de los que algunos respondían al entorno de la proporcionalidad. En la cuarta sesión, EPM trabajaron de nuevo de forma colaborativa, formando un total de 33 equipos de trabajo (a los que nos referiremos como E1, E2, etc.) para responder a las consignas siguientes sobre creación de problemas.

- *Tarea 1. Creación de problemas por variación*

A partir de la siguiente situación, sacada de un libro de texto de educación primaria, debéis crear tres problemas por variación, de manera que en los tres problemas que creéis no cambien siempre los mismos elementos respecto del enunciado inicial.

Calcula el dato que falta

Entradas	*17*	*9*
Precio	*85*	x

- *Tarea 2. Creación de problemas a partir de un requerimiento didáctico-matemático*

Crea un problema en el que los alumnos deban distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas y no todas las razones que intervengan sean enteras.

Con la primera tarea, se pretende valorar el grado de conocimiento logrado sobre los elementos que caracterizan un problema y la flexibilidad de los EPM para crear problemas significativos partiendo de una situación dada cuando deben variar de diferentes formas dichos elementos. Con la segunda consigna se persigue, por un lado, valorar el conocimiento-didáctico matemático de EPM sobre aspectos esenciales del razonamiento proporcional, como son reconocer razones enteras (relación de divisibilidad entre los términos) y no enteras en la relación de proporcionalidad, identificar la

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

relación multiplicativa en situaciones proporcionales (la relación entre las magnitudes es de la forma $y = kx$, siendo k una constante) y distinguirla de la relación aditiva (la relación entre las magnitudes es de la forma $y = x + k$, siendo k una constante) (Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 2007; Van Dooren *et al*., 2008). Por otro, persigue evaluar su competencia para crear problemas en los que se pueda diagnosticar las posibles dificultades del alumnado de primaria con estos aspectos.

Mostramos a continuación una posible solución (realizada por el equipo investigador) a cada una de las tareas propuestas a EPM.

Solución a la tarea 1. En el problema inicial, no aparece un contexto claro: se presenta una tabla a completar que relaciona “entradas” y “precio”. La información es el precio, 85 euros, que corresponde a 17 entradas. El requerimiento (incógnita) es el precio correspondiente a 9 entradas.

El entorno matemático es la proporcionalidad (se asume que se paga lo mismo por cada una de las entradas, luego el precio es directamente proporcional al número de entradas).

1) Problema creado por variación de la información y del requerimiento.

Calcula el dato que falta.

Entradas	*x*	*9*
Precio	*85*	*45*

2) Problema creado por variación del contexto y la información.

Si Neftalí compró 5 entradas para ir con sus amigos de la universidad a ver un partido al estadio y pagó 41 euros en total, ¿cuánto deberá pagarle Ismael por su entrada y la de su novia?

3) Problema creado por variación de la información, el requerimiento y el contexto.

Las maestras de 6º de primaria han pensado premiar a los alumnos y alumnas que obtuvieron sobresaliente en el último examen. La maestra de 6ºA les llevará al parque de las ciencias y la de 6º B al cine. La maestra de 6ºA ha pagado 84 euros por las entradas de sus 12 alumnos y la maestra de 6ºB ha pagado 45 euros por 9 entradas. ¿Qué es más caro, entrar al parque de las ciencias o al cine?

Solución a la tarea 2. A continuación, se incluye un ejemplo de problema (tomado de Burgos y Godino, 2022, p. 387) que responde a esta consigna:

Ana, María y Luis están plantando árboles en el campamento “Repoblamos”. Ana y María empezaron al mismo tiempo, pero María es más rápida. Luis va a la misma velocidad que Ana, pero empezó antes. Cuando Ana había plantado 4 árboles, María había plantado 12 y Luis había plantado 8. Al acabar, Ana ha plantado 15 árboles.

a) *¿Cuántos árboles habrá plantado María? Explica cómo lo has averiguado.*

b) *¿Cuántos árboles habrá plantado Luis? Explica cómo lo has averiguado.*

c) *Pasado un tiempo, si sabes el número de árboles que ha plantado Ana, ¿cómo podrías saber el número de árboles que ha plantado María? ¿Y el número de árboles que ha plantado Luis? Explica tu respuesta.*

La relación entre los árboles plantado por Ana y María es directamente proporcional, dado que empezaron al mismo tiempo,

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470

pero María es más rápida. Cuando Ana había plantado 4, María había plantado 12 (el triple de rápida). Al acabar Ana ha plantado 15 árboles. La razón 4 a 15 no es entera, pero la razón 4 a 12 si lo es (12 = 4 x 3). En cambio, la relación entre los árboles plantados por Ana y Luis no es proporcional, dado que ambos van igual de rápido, pero Luis había empezado antes. Como plantan a la misma velocidad y Luis había plantado 8 árboles cuando Ana había plantado 4, quiere decir que le lleva "4 árboles de ventaja". Por tanto, el número de árboles que ha plantado Luis es 4 más (situación aditiva) que los árboles que ha plantado Ana, en cualquier momento.

Categorías de análisis

Presentamos en esta sección las categorías empleadas para la valoración de las respuestas de los sujetos participantes a las consignas previas. Estas fueron establecidas a priori por el equipo investigador teniendo en cuenta el requerimiento de la actividad: por un lado, la significatividad del enunciado y por otro lado, que se construya por variación del problema inicial en la primera tarea y que permita distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas y no todas las razones involucradas sean enteras, en la segunda tarea.

Pertinencia de los problemas creados. Para que el problema se considere pertinente debe ser, en primer lugar, significativo. Esto supone que el enunciado propuesto establezca realmente un problema matemático, en particular, que la solución no esté implícita en el enunciado; que su redacción sea clara y no presente ambigüedad (falta o redundancia en la información), así como que se identifiquen claramente los distintos elementos que lo caracterizan. Si no posee alguna de estas características se considera un problema no significativo. En este sentido, y para el propósito de nuestra investigación, el enunciado no se considera significativo si solicita inventar un problema, o si el requerimiento implica solamente creencias, un dominio meramente conceptual o si es posible responder al mismo sin realizar ningún tipo de procedimiento matemático (aritmético, geométrico o de otro tipo). Un problema se considera *pertinente* cuando, además de ser significativo, responde a las condiciones establecidas para su creación (por variación o por elaboración).

En la primera tarea, EPM debían crear tres problemas distintos, a partir de uno inicial, variando en cada ocasión al menos dos de sus elementos, pero no todos. Contemplamos las siguientes categorías para analizar el grado de éxito de los enunciados propuestos:

- Enunciado *no pertinente*. El enunciado propuesto no es significativo (Figuras 1 y 2) o bien es significativo, pero no se obtiene por variación del inicial. Por ejemplo, es significativo, pero no variación del inicial, el problema propuesto por E33:

En una bolsa tenemos 85 bolas, 17 son rojas y el resto azules. ¿Qué probabilidad hay de sacar una bola azul? Y si el total es de 85 bolas y hay 17 azules, 25 bolas amarillas y 43 verdes, ¿cuál es la probabilidad de NO sacar una bola amarilla?

- Enunciado *poco pertinente*. El enunciado propuesto es significativo y se obtiene por variación de un solo elemento del problema inicial. Un ejemplo en esta categoría vendría dado por el siguiente enunciado, donde se cambia únicamente el contexto:

El grupo de 2ºB va a ir al teatro para ver una representación teatral de Lorca, son

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

17 alumnos y las entradas cuestan 85 euros. El grupo de 3ºA quiere ir también, pero son 9 alumnos. ¿Cuánto le costarán las entradas? (E27)

- Enunciado *pertinente*. El enunciado propuesto es significativo y se obtiene por la variación de más de un elemento del inicial, pero no todos (ver Figura 3).

En la siguiente tarea se pide a los EPM que creen un problema cuya solución requiera distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas y en el que no todas las razones involucradas sean enteras. Surgen así las siguientes categorías:

- Enunciado *no pertinente*. El enunciado propuesto no es significativo (Figura 6), o bien es significativo, pero no permite distinguir situaciones proporcionales de aditivas (Figura 8, Figura 9).

- Enunciado *poco pertinente*. El enunciado propuesto es significativo, permite distinguir situaciones proporcionales de aditivas, pero todas las razones involucradas son enteras (véase la Figura 10).

- Enunciado *pertinente.* El enunciado propuesto es significativo, permite distinguir situaciones proporcionales de aditivas y no todas las razones involucradas son enteras.

Análisis y resultados

A continuación, presentamos los resultados del análisis de contenido de las respuestas elaboradas por los equipos de trabajo a las tareas propuestas en la intervención, siguiendo las categorías establecidas en la sección previa.

Creación de problemas por variación

En la primera tarea, los grupos de EPM debían crear tres problemas mediante la variación de al menos dos componentes del problema inicial, de manera que en las tres situaciones propuestas no modificasen siempre los mismos elementos respecto del enunciado de partida. La Tabla 1 muestra los resultados en relación con el grado de pertinencia de los 96 problemas creados por los 32 equipos (el equipo E17 no creó ninguno de los tres problemas solicitados).

Como se observa en la Tabla 1, el 81,25 % de los problemas creados fueron significativos y por variación de al menos un elemento en el enunciado inicial. Trece de los problemas propuestos por los EPM se consideraron (no pertinentes) no significativos. En primer lugar, dos de ellos (creados uno por E5 y otro por E14), no formulan un

Tabla 1. *Distribución de frecuencia en la pertinencia de los problemas creados por variación por los equipos de EPM (n=96)*

Categoría	Frecuencia (Porcentaje)
Enunciado no pertinente	18 (18,75)
No significativo	13 (13,54)
Significativo, pero no por variación	5 (5,21)
Enunciado poco pertinente	16 (16,67)
Enunciado pertinente	62 (64,58)
Total	**96 (100)**

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, Nº. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

problema, sino que demandan inventar uno. Así E5 plantea "Inventa un problema de proporcionalidad a partir de los siguientes datos". Otros cinco equipos plantearon un problema cuya solución se encuentra dentro del enunciado. Un ejemplo se muestra en la Figura 1.

Es posible que este equipo pretendiera decir que "Ana se ha gastado 45 en comprar libros del mismo precio unitario que los que ha comprado Marta", lo que además llevaría a suponer que todos los libros que compró Marta tenían el mismo precio (algo no establecido en el enunciado). Sin embargo, tal cual se enuncia, Ana compró los mismos libros que Marta, por lo que la cantidad de libros comprados por ella es 17 (igual a Marta).

Los otros seis problemas no significativos presentan ambigüedades, que impiden dar una solución numérica o relacional al problema. Por ejemplo, en el enunciado propuesto por E4 que aparece en la Figura 2, se solicita determinar el precio total de las entradas de un grupo de escolares del que no se conoce el número de personas que lo forman. Con la información dada no se puede dar respuesta al problema.

Cinco equipos crearon un problema significativo, pero no pertinente, pues cambiaron los cuatro elementos (información, requerimiento, contexto o entorno) del problema inicial, por lo que no se consideran como variación del enunciado inicial. En la Tabla 2 se muestra la distribución de elementos que variaron los sujetos participantes en los problemas poco pertinentes (16 en los que se modificó un único elemento respecto del enunciado inicial) o pertinentes (62 que variaron dos o más elementos del problema inicial). Todos ellos corresponden a problemas en el entorno de la proporcionalidad.

Marta se ha gastado 85€ en comprar 17 libros de aventuras y su Amiga Ana, se ha gastado 45€ en comprar los mismos libros que su amiga Marta ¿Cuántos libros habrá comprado Ana?

Figura 1. *Enunciado no significativo creado por E33 (con solución implícita).*
Fuente propia de la investigación.

En el colegio de Juan, los alumnos de 5° han comprado entradas para asistir a un teatro, si 5°A donde hay 17 alumnos ha pagado 85€ ¿Cuánto pagaran los alumno de 5ºB en total?

Figura 2. *Problema no significativo, ambigüedad en el requerimiento (E4).*
Fuente propia de la investigación.

Tabla 2. *Distribución de frecuencias de los problemas poco pertinentes y pertinentes creados por los equipos de EPM, según las combinaciones de los elementos variados del problema inicial (n=78)*

Elementos variados	Combinaciones de elementos variados	Frecuencia (Porcentaje)
1	Información	2 (2,56)
	Contexto	14 (17,95)
2	Información y requerimiento	3 (3,85)
	Requerimiento y contexto	6 (7,69)
	Información y contexto	19 (24,36)
3	Información, requerimiento y contexto	34 (43,59)
Total		**78 (100)**

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Como se observa en la tabla anterior, la combinación de elementos que los EPM varían con mayor frecuencia en el problema inicial para crear otros son: información, requerimiento y contexto (43,59 % de los problemas propuestos con cierto grado de pertinencia). Esto puede deberse a la mayor dificultad que supone para los EPM modificar la información (lo que se da) sin modificar el requerimiento (lo que se pide) o recíprocamente, algo que ellos mismos plantean a la profesora durante la intervención. En la Figura 3 se presenta un ejemplo de problema creado por uno de los equipos en el que se varían estos tres elementos.

También se puede observar en la Tabla 2 que el contexto aparece modificado en 73 (93,59 %) de los problemas, luego es el componente que presenta mayor variación (considerando todas las combinaciones que lo incluyen). En 65 (83,33 %) de los problemas propuestos el contexto es extra-matemático. En estos casos tienden a emplear mayoritariamente (en 45 enunciados) situaciones de ocio en las que las magnitudes relacionadas son "cantidad de entradas" (al cine, conciertos, parques de atracciones, partidos, teatros, entre otras) y "precio", seguido de situaciones de compra de algún objeto (6 problemas) y actividades que implican cálculos de tiempo (5 problemas). Como en el trabajo de Tichá y Hošpesová (2013), los equipos EPM se alejan poco del contexto de la situación inicial para crear los demás problemas. Esto sugiere, como ya observaron Balderas et al. (2014), ciertas limitaciones de EPM para inventar problemas con distintas magnitudes relacionadas o contextos, y la tendencia a conservar una estructura similar al del problema dado.

La información es el segundo elemento que los EPM varía con mayor frecuencia respecto del problema original (Tabla 2). Este se modificó en 58 (74,36 %) de los problemas. En este caso, las personas participantes cambiaron principalmente los valores conocidos, pero mantuvieron la posición de estos y no añadieron nuevos datos al enunciado. Se concibe además la proporcionalidad siempre desde un enfoque aritmético (Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer, 2016). En la Figura 4 se muestra un ejemplo de problema poco pertinente, en el que los EPM variaron únicamente la información.

Jesús y su grupo de amigos fueron al parque de atracciones el pasado domingo. Al llegar a la taquilla, pidieron 17 entradas, y le cobraron 85 €. Al abandonar la taquilla, las chicas del grupo han pagado 45 €. ¿Cuántas chicas hay en el grupo?

Figura 3. *Problema pertinente elaborado por variación de la información, requerimiento y contexto (E28).*
Fuente propia de la investigación.

★ Calcula el el dato que falta:

ENTRADAS	*17*	*9*
PRECIO	*X*	*17*

Figura 4. *Problema elaborado por variación única de la información (E27).*
Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470

De los 24 equipos que crearon más de un problema pertinente, solo dos equipos diseñaron tres problemas en los que no siempre variaron los mismos elementos (respondiendo a lo que se pedía en la tarea); catorce crearon al menos dos problemas variando una combinación diferente de los elementos del problema inicial (ver Figura 5); siete equipos propusieron solo dos problemas con los mismos elementos variados; y un equipo creó los tres problemas con la misma modificación en los elementos del problema propuesto.

Como se observa en la Figura 5, en ambos problemas propuestos, el equipo E25 varía el contexto respecto del enunciado inicial y la información. En el problema 2, el requerimiento lleva igual que en el problema inicial a determinar un valor faltante (con la salvedad de que, en este caso, se conoce el valor unitario), mientras que en el problema 1 se cambia uno de los datos conocidos en el problema de partida (en lugar de 9 entradas utiliza 1) y el requerimiento supone determinar el precio de una entrada (situación proporcional) y, además, el coste añadiendo el precio de la suscripción (aditiva).

Creación de problemas a partir de un requerimiento didáctico-matemático

En la segunda consigna, los equipos de EPM debían crear un problema que llevara a distinguir situaciones directamente proporcionales de situaciones aditivas y que las razones involucradas no fueran todas enteras (requerimiento didáctico-matemático). En este caso, como se observa en la Tabla 3, casi la totalidad de los problemas creados son no pertinentes.

Problema 1. Variación de la información, requerimiento y contexto.

En un cine nos informan de que 17 entradas tienen un precio de 85€. Si solamente quiero comprar 1 entrada y además pagar la suscripción de socio del cine que cuesta 20€ ¿cuánto pagaré en total?

Problema 2. Variación de información y contexto.

Jesús se ha gastado en la entrada de un concierto 7€. ¿Cuánto dinero se gastará si le compra la entrada a 4 amigos más?

Figura 5. *Problemas con una combinación diferente de elementos variados (E25).*
Fuente propia de la investigación.

Tabla 3. *Distribución de categorías y frecuencias de problemas creados por requerimiento didáctico-matemático (n= 33)*

Categorías		**Frecuencia (Porcentaje)**
Enunciado no pertinente		32 (96,97)
	No significativo	14 (42,42)
	Significativo, pero no permite distinguir situaciones proporcionales de aditivas	18 (54,55)
Enunciado poco pertinente		1 (3,03)
Enunciado pertinente		0 (0)
Total		**33 (100)**

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Gran parte de los problemas elaborados por los EPM en esta tarea fueron no significativos. En este caso, la razón principal se debe a que doce de los enunciados propuestos son ambiguos (no dejan claro el requerimiento o la relación entre las magnitudes involucradas) y dos no se consideraron problema, dado que piden al alumnado determinar si ciertas proposiciones (en relación con magnitudes directamente proporcionales) son correctas o decidir qué situaciones responden a una relación de proporcionalidad directa (o inversa). A continuación, mostramos ejemplos para los enunciados identificados.

El problema propuesto por E11 (Figura 6) muestra un ejemplo de enunciado ambiguo, pues no se establece la condición de regularidad: "el consumo es constante en ambos coches", que necesaria para contestar la primera pregunta. Además, suponiendo el consumo constante, las razones 3,5 a 10 frente a 3 a 10 permiten decidir cual tiene un mayor consumo, lo que responde directamente a la segunda pregunta planteada por E11. En todo caso, no se hace mención del precio del litro de combustible que no tiene por qué ser el mismo para ambos tipos (gasoil o gasolina).

Esta falta de reflexión por parte de los grupos de EPM sobre las condiciones que permiten reconocer si una situación es de proporcionalidad directa al plantear un problema, es un hecho muy frecuente en las propuestas de los equipos. Como se observa en el enunciado propuesto por E7 en la Figura 7, no se establecen las condiciones de regularidad (todas las barras de pan cuestan lo mismo, los obreros trabajan a igual ritmo, el caudal del grifo es constante, etc.) que permitan responder si la frase es correcta o no en base a la existencia o no de una relación de proporcionalidad directa, inversa o de otro tipo.

> Antonio tiene que hacer un viaje de 25 km, y tiene que comprarse un coche para hacerlo. Ha encontrado dos coches, el primer coche de gasolina gasta 3.5 litros en 10 km, y el segundo coche de gasoil gasta 3 litros en 10 km. ¿Cuánto gasta cada coche en 25 km? ¿Con cuál gastaría más de los dos?

Figura 6. *Problema no significativo (E11).*
Fuente propia de la investigación.

> Señala las frases correctas:
>
> -Al comprar el doble de barras de pan, nos cobran el doble.
> -Si un obrero tarda 10 horas en levantar un muro, dos obreros tardarán 5 horas en levantar el mismo muro.
> -Si tengo 10 años y peso25 kilos, cuando tenga 20 años pesaré 50 kilos.
> -Una camiseta cuesta 15,50 euros, si compro dos tendré que pagar el doble, aunque haya un descuento del 20 por ciento en la segunda prenda.
> -Si un grifo de agua abierto echa 5 litros de agua si está abierto 1 minuto, si lo dejamos abierto 3 minutos echará 15 litros de agua.

Figura 7. *Enunciado no considerado problema (E7).*
Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

De la Tabla 3 se sigue que más de la mitad de los problemas (18 de los 33), si bien eran significativos no permitían distinguir situaciones proporcionales de aditivas. En su mayoría, catorce, presentan solo situaciones proporcionales, de estos, cuatro tienen todas las razones enteras y diez utilizan razones donde no todas son enteras. Los restantes, no incluyen situaciones proporcionales, sino que o bien establecen una relación aditiva entre magnitudes, o bien, plantean un problema aditivo de comparación. Aunque en principio esta dificultad para plantear un problema que permita distinguir situaciones proporcionalidades de aditivas puede venir motivado por la propia dificultad en los futuros cuerpos docentes para diferenciarlas (Balderas *et al*., 2014; Buforn y Fernández, 2014; Burgos *et al*., 2018; Burgos y Godino, 2020, 2021, 2022), en otros casos, se observa que la limitación la encuentran para involucrar ambas relaciones entre diferentes magnitudes en un mismo problema.

Por ejemplo, en la Figura 8, se incluye el problema propuesto por E1, en el que la relación entre las magnitudes (número de vuelta al patio dadas por Mónica y número de vueltas dadas por Juan) es aditiva (Juan siempre le lleva 3,5 vueltas de ventaja). El equipo E1 diferencia situaciones aditivas de proporcionales y reconoce el error frecuente en estudiantes para tratar como multiplicativa una relación aditiva. Sin embargo, su enunciado no involucra ambos tipos de situaciones como se esperaba.

En relación con esta dificultad, los equipos de EPM consideran que "distinguir" una situación proporcional de una aditiva supone proponer problemas de dos etapas: una que plantea la relación entre una (o dos) relaciones multiplicativas entre magnitudes (por ejemplo, en el enunciado de la Figura 9, número de libretas –precio pagado por ellas– y número de paquetes de subrayadores –precio pagado por ellos–) y después una segunda etapa en el problema se resuelve con una operación aditiva, suma frecuentemente ("¿Cuánto dinero ha gastado?", en la Figura 9).

Las personas participantes tienen mayor facilidad para establecer razones enteras y no enteras en problemas donde no distinguen situaciones proporcionales de

> *Mónica y Juan están corriendo a la misma velocidad en el patio del colegio, pero Mónica salió al recreo un poco más tarde porque no había hecho los deberes del día anterior. Cuando Mónica llevaba 3'5 vueltas, Juan llevaba ya 7. Ahora Mónica ha dado 15 vueltas, ¿cuántas vueltas lleva Juan?*
>
> En este problema, los estudiantes tienden a utilizar incorrectamente métodos multiplicativos al identificar "el doble" en la oración Cuando Mónica llevaba 3'5 vueltas, Juan llevaba ya 7. Por este motivo, utilizan la relación del doble (x2) para calcular las vueltas que lleva Juan al final cuando habría que sumarle 3'5 a las vueltas de Mónica al ser esta una situación aditiva.

Figura 8. *Problema significativo no pertinente, relación aditiva entre magnitudes (E1).*
Fuente propia de la investigación.

> Antonia tiene que comprar 5 libretas y tres paquetes de subrayadores. Cada libreta cuesta 2,50€ y cada paquete de subrayadores 5€. ¿Cuánto dinero ha gastado?

Figura 9. *Problema significativo, no pertinente: solo situación proporcional, precio unitario decimal (E16).*
Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

aditivas. Cuando los grupos de EPM buscan razones no enteras (relación $a : b$ cuando a no es múltiplo o divisor de b) recurren en su mayoría a la expresión de la razón como número decimal (si bien estas razones se entienden como relaciones entre números enteros), estableciendo la relación que consideran no enteras usualmente entre distintas magnitudes (precio unitario decimal como se ve en la Figura 9).

Finalmente, la Tabla 3 pone de manifiesto que ninguno de los equipos logró responder de manera correcta y completa a lo que se les solicitaba de forma explícita en esta tarea. Solo un equipo planteó un problema (Figura 10) que involucra situaciones aditivas y proporcionales, si bien todas las razones son enteras.

Conclusiones

En este artículo hemos informado del diseño, implementación y análisis de una intervención con futuro personal docente de educación primaria, basada en la creación de problemas de proporcionalidad por variación o por elaboración para responder a un requerimiento didáctico-matemático específico. Los resultados obtenidos ayudan, por un lado, a identificar y comprender las limitaciones que presentan en estas tareas y a diagnosticar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas que ponen en juego en la formulación de problemas sobre proporcionalidad. Por otro, a tomar decisiones y pautas preventivas que favorezcan el desarrollo de habilidades en la creación como parte de la formación docente (Mallart *et al.*, 2018).

Teniendo en cuenta el carácter piloto de esta experiencia, es importante considerar las limitaciones encontradas para mejorar el diseño en futuras implementaciones. Cuando los grupos de EPM crean problemas de proporcionalidad por variación escogen fundamentalmente el enfoque aritmético de la proporcionalidad. Como muestran investigaciones previas, este es el enfoque prioritario (Ben-Chaim *et al.*, 2012) "presente en múltiples situaciones de la vida cotidiana y en prácticamente todas las disciplinas científicas, incluidas las sociales y las artes" (Balderas *et al.*, 2014, p. 2). Sin embargo, el profesor debe conocer los diversos significados de la proporcionalidad, por lo que, en futuras intervenciones, sería adecuado diseñar consignas de creación de problemas específicas para significados como el geométrico, funcional (Aroza *et al.*, 2016; Burgos y Godino, 2020) o incluso probabilístico, en el que el razonamiento proporcional juega un papel decisivo (Begolli *et al.*, 2021).

La mayoría de los enunciados creados por variación fueron pertinentes, es decir, significativos y modificando dos de los cuatro elementos que caracterizan un problema (contexto, entorno, información y requerimiento). En este caso, debido quizás

> Andrea y sus tres hermanas quieren ir de vacaciones a Canarias, en la agencia de viajes les han explicado que los vuelos cuestan 95 euros por persona. Sin embargo, si se hacen clientes de la agencia de viajes, los vuelos pasarán a costar 60 euros por persona. Sabiendo que para hacerse socios deben pagar 100 euros entre las cuatro hermanas, ¿cuánto pagarían las hermanas en cada uno de los casos?, ¿qué opción es más rentable?

Figura 10. *Problema poco pertinente. Distingue situaciones proporcionales de aditivas, pero todas las razones son enteras (E9).*
Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

al formato del problema dado, vinculado a una "tabla de proporcionalidad", este fue el entorno en todos los enunciados pertinentes y el contexto fue el extra-matemático. Para Calvo (2008), esta relación de las matemáticas con la cotidianidad acrecienta el conocimiento matemático, mostrando al alumnado que esta disciplina se encuentra también fuera de las aulas. Esto permite a los futuros y futuras docentes desarrollar el componente afectivo mediante la utilidad de la proporcionalidad en la vida diaria (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020).

A pesar del éxito para crear enunciados pertinentes por variación, formular diversos problemas en los que no siempre se modifiquen los mismos elementos fue algo que supuso mayor dificultad a los grupos de EPM: la tercera parte de los equipos no pudo crear dos problemas variando una combinación diferente de los elementos del problema inicial. A pesar de que la creación de problemas forma parte de la formación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el grado de educación primaria, esta se centra en la formulación de problemas aritméticos de estructura aditiva o multiplicativa en base al tipo de estructura semántica del problema, así que, fuera de este ámbito, los equipos de EPM se encuentran en una posición extraña e inusual que requiere de una mayor formación (Tichá y Hošpesová, 2013). Como sugieren Tichá y Hošpesová (2013), los profesores y profesoras "deben ser conscientes de los múltiples aspectos asociados al proceso de planteamiento de problemas" (p. 142), lo que supone entre otros, conocer la forma de articular información y requerimiento de manera adecuada en la formulación de un problema. Este ha sido el elemento más controvertido cuando los EPM de nuestra experiencia debían modificar estos elementos. Por otro lado, nos lleva a plantear la necesidad de que los programas de formación de docentes refuercen las estrategias de creación de problemas a lo largo de toda la formación y en diversos contenidos de las matemáticas.

Las dificultades encontradas tanto en estudiantes como en docentes en formación (Buforn y Fernández, 2014; Burgos y Godino, 2021; Fernández y Llinares, 2011, 2012), lleva a considerar la distinción entre situaciones proporcionales y aditivas como uno de los objetivos a lograr en la formación de profesorado sobre razonamiento proporcional (Buforn *et al*., 2018). Por este motivo, la creación por parte de los futuros personales docentes de problemas en los que se persiga este aspecto, puede ser un buen recurso para superar estas limitaciones. Sin embargo, los resultados de nuestra investigación muestran un conocimiento matemático y didáctico insuficiente en los EPM para abordar con éxito esta tarea, que se observa también en una interpretación inadecuada de las razones enteras o no enteras en situaciones de proporcionalidad. Dado que, en este caso, se pueden haber entrelazado carencias en el conocimiento matemático con la complejidad para involucrar diversas relaciones entre diferentes magnitudes en un mismo problema (que hayan derivado en un gran porcentaje de problemas no significativos) sería necesario determinar, y mejorar si fuera necesario, el conocimiento matemático de los participantes sobre razonamiento proporcional previo a la intervención. De igual forma, se debe insistir en el aspecto relacional y de correspondencia entre magnitudes, trabajando situaciones proporcionales y no proporcionales, prestando atención especial a las relaciones aditivas entre magnitudes (dado que en esta investigación la mayoría de participantes parecían interpretarlas como problemas que se resuelven con una

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

suma o resta). Esto permitirá averiguar qué dificultades con la creación de problemas tienen su origen en un conocimiento deficiente sobre la proporcionalidad, o cuáles se deben a la falta de comprensión de la consigna e indicaciones del instrumento.

También sería adecuado pedir (en futuras intervenciones) a los sujetos participantes la solución de los problemas inventados; en este trabajo no era parte de las consignas, por lo que solo algunos de los informes contenían dicha información. Parece que los futuros cuerpos docentes necesitan una reflexión más profunda sobre las prácticas matemáticas que motivan sus problemas, que no se logra si no se les pide explícitamente su solución. Además, sería pertinente una puesta en común para que analicen y valoren críticamente las propuestas de sus pares y sus propias producciones.

Coincidimos con estudios como los de Ellerton (2013); Malaspina *et al*. (2015); Şengül y Katranci (2015a) entre otros, al considerar que la creación de problemas debe tener un papel central en los planes de formación de profesorado. Junto con la flexibilidad de estrategias, la invención de problemas forma parte del conocimiento del profesorado para la enseñanza sobre resolución de problemas (Milinković, 2015; Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2019). La creación de problemas en la formación inicial y continua les ayuda a mejorar su técnica de análisis de la actividad matemática (Mallart, Font y Malaspina, 2016), entendida como tarea docente esencial para anticipar conflictos de aprendizaje, gestionar los procesos de institucionalización necesarios y evaluar las competencias matemáticas del alumnado (Burgos y Godino, 2020).

Es posible replicar este estudio con ciertas adaptaciones, modificando el problema dado, el requerimiento didáctico-matemático o el entorno, para atender a nuevos conocimientos. La flexibilidad de la metodología permite diseñar e implementar nuevas intervenciones con docentes en formación de educación secundaria, así como con profesorado en ejercicio, tanto de educación primaria como de secundaria, en las que esperaríamos obtener mejores resultados que los actuales.

Financiamiento

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI /10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e Innovación), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España). Se reconoce el apoyo de la AUIP y la Consejería de Transformación Económica, Industria, Conocimiento y Universidades de la Junta de Andalucía como patrocinadores del Programa de Becas de Movilidad Académica de la AUIP.

Conflicto de intereses

El equipo de autoría declara no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de las personas autoras

Todas las personas autoras afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: MB 55 % y J.C.H 45 %.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [M.B.], previa solicitud razonable.

Referencias

Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES, 6*, 6(1). http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Aroza_Godino_Beltran.pdf

Ayllón, M. F., Gallego, J. L., y Gómez, I. A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos, 38*(152), 51–67. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57588

Balderas, R. G., Block, D. y Guerra, M. T. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué": Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática, 26*(2), 7–32.

Begolli, K. N., Dai, T., McGinn, K. M. y Booth, J. L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science, 49*, 441–473. https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education, 50*(1), 1–20. https://doi.org/10.1080/0305764X.2019.1623175

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher. https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-6091-784-4

Bonotto, C. (2013). Artifacts as source for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37–55. +

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Buforn, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21–41. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a02

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *RMIE, 23*(76), 229–251.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulties in solving proportionality problem. *Mathematics Education Research Journal, 34*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00344-9

Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros maestros de educación primaria. *Profesorado. Revista De Currículum Y Formación Del Profesorado, 25*(2), 281–306. https://doi.org/10.30827/profesorado.v25i2.8725

Burgos, M. y Godino, J. D. (2022). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*, 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, 1–22. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación, 32*(1), 123–138. https://doi.org/10.15517/revedu.v32i1.527

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM – Mathematics Education,* 37(3), 149–158. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8va ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Contreras, J. (2007). Unraveling the Mystery of the Origin of Mathematical Problems: Using a Problem-Posing Framework With Prospective Mathematics Teachers. *The Mathematics Educator, 17*(2), 15–23. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ841562.pdf

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87–101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z

Espinoza, J. (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas, 3*(39), 64–72.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista digital matemática, 14*(2), 1–12. http://dx.doi.org/10.18845/rdmei.v14i2.1664

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *14*(2), 368–392. https://doi.org/10.14204/ejrep.39.15067

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 67–80. https://doi.org/10.1174/021037011794390111

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), pp. 129–142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44*(6), 747–759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2–3), 167–200. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289630/document

Kiliç, Ç. (2013). Determining the Performances of Pre-Service Primary School Teachers in Problem Posing Situations. *Educational Sciences: Theory & Practice, 13*(2), 1207–1211. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1017363.pdf

Koichu, B. y Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics 83*, 71–86 (2013). https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9

Kwek, M. L. (2015). Using problem posing as a formative assessment tool. En F. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: from research to effective practice* (pp. 273–292). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_13

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Information Age Pub Inc.

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. En M. Pytlak,T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for research in mathematics education* (pp. 336–345). University of Rzeszów.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: Sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En A. Ruiz (Ed.), *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (pp. 321–331). Universidad de Costa Rica.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861–2866). Proceedings of the CERME 9.

Malaspina, U., Torres, C. y Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, y L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 133–151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7

Mallart, A., Font, V. y Diez, J. (2018). Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1465–1481. https://doi.org/10.29333/ejmste/83682

Mallart, A., Font, V. y Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles educativos, 38*(152), 14–30. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57585F

Milinković, J. (2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. En J. Cai, N. Ellerton, y F.M. Singer (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice*, (pp. 47–70). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_3

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de matemáticas.* San José, Costa Rica. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24*(1), 113–157. http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v24n1/v24n1a6.pdf

Moreno, K. M., Rey, M. P, Torres, P. L. y Pinilla, L. M. (2015). *La resolución de problemas: Estrategia metodológica para aprender y enseñar matemáticas en la media especializada del Colegio Reino de Holanda* [Tesis de maestría]. Universidad Santo Tomás. https://repository.usta.edu.co/bitstream/handle/11634/3039/Pinillamaria2016.pdf?sequence=1

Pino-Fan, L. R., Báez-Huaiquián, D. I., Molina-Cabero, J. G. y Hernández-Arredondo, E. (2020). Criterios utilizados por profesores de matemáticas para el planteamiento de problemas en el aula. *Uniciencia, 34*(2), 114–136. https://doi.org/10.15359/ru.34-2.7

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA* 13(2), 104–129. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7876

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick, y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 1055–1061). The Ohio State University.

Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42b), 559–588. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200008

Şengül, S. y Katranci, Y. (2015a). The analysis of the problems posed by prospective mathematics teachers about 'ratio and proportion' subject. *Procedia. Social and Behavioral Sciences, 174*, 1364–1370. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.760

Şengül, S. y Katranci, Y. (2015b). Free problem posing cases of prospective mathematics teachers: Difficulties and solutions. *Procedia. Social and Behavioral Sciences, 174*, 1983–1990. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.864

Serin, M. K. (2019). Analysis of the problems posed by pre-service primary school teachers in terms of type, cognitive structure and content knowledge. *International Journal of Educational Methodology*, *5*(4), 577-590. https://doi.org/10.12973/ijem.5.4.577

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational studies in mathematics, 83*(1), 157–162. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3

Singer, F. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational studies in mathematics*, *83*(1), 9–26. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Singer, F., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational studies in mathematics, 83*(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Stoyanova, E. y Ellerton, N.F. (1996). A framework for research into students' problem posing. En P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Tichá, M., y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133–143. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(3), 311-342.

Xie, J. y Masingila, J. O. (2017). Examining Interactions between Problem Posing and Problem Solving with Prospective Primary Teachers: A Case of Using Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 101–118. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr