Uniciencia Vol. 37(1), pp. 1-20, January-December, 2023
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470

Un estudio comparado del razonamiento proporcional de estudiantado costarricense y español en tareas de comparación de razones

A Comparative Study of Proportional reasoning of Costa Rican and Spanish students in ratio comparison problems

Estudo comparativo do raciocínio proporcional de estudantes costarriquenhos e espanhóis em tarefas de comparação de razões

Carmen Batanero[1], **Luis Armando Hernández-Solís**[2*]

Received: Sep/8/2022 • Accepted: Mar/9/2023 • Published: Jun/1/2023

Resumen

[Objetivo] El objetivo del trabajo fue evaluar el nivel de razonamiento proporcional y estrategias en problemas de comparación de razones de estudiantado costarricense y español entre 11 y 16 años. **[Metodología]** Mediante un enfoque de investigación interpretativo, se propone a 704 estudiantes uno de dos cuestionarios con tres ítems sobre comparación de razones (en total seis niveles diferentes de razonamiento proporcional, según Noelting). Se presenta el porcentaje de respuestas correctas y niveles de razonamiento proporcional y el resultado de un análisis de contenido de las estrategias correctas e incorrectas. **[Resultados]** La mayoría de estudiantes responden correctamente a los problemas de menor nivel de razonamiento proporcional de Noelting (IA a IIA), disminuyendo esta proporción en los cursos 6º a 8º de Educación General Básica al aumentar el nivel de razonamiento proporcional del problema. Resultados similares se obtienen respecto a las estrategias correctas. Las estrategias incorrectas más frecuentes fueron la comparación de los primeros términos de las razones y las comparaciones aditivas. Prácticamente la totalidad de estudiantes alcanza los dos primeros niveles de razonamiento proporcional de Noelting, y conforme avanza el curso, una proporción mayor consigue los siguientes niveles de razonamiento, pero una cantidad pequeña de estudiantes, ni siquiera en el décimo curso de Educación Diversificada llega al nivel IIIA correspondiente a las operaciones formales. **[Conclusiones]** Se concluye la necesidad de reforzar en la enseñanza el razonamiento sobre comparación de razones, y tenerlo en cuenta en los temas matemáticos basados en este razonamiento.

Palabras clave: Evaluación; Nivel de razonamiento; Proporcionalidad; Comparación de razones; Estudio comparado.

* Autor para correspondencia
Carmen Batanero, batanero@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4189-7139
Luis Armando Hernández-Solís, lhernandez@uned.ac.cr, https://orcid.org/0000-0003-2956-8102
1 Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.
2 Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Estatal a Distancia, San José, Costa Rica.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

[Objective] This study seeks to evaluate the level of proportional reasoning and strategies in ratio comparison problems of Costa Rican and Spanish students between 11 and 16 years old. **[Methodology]** Using an interpretative research approach, 704 students were given one of two questionnaires with three items on ratio comparison (a total of six different levels of proportional reasoning, according to Noelting). The percentage of correct answers and levels of proportional reasoning, and the result of a content analysis of correct and incorrect strategies are presented. **[Results]** The majority of students correctly answered the problems with the lowest Noelting proportional reasoning level (IA to IIA), with this proportion decreasing in grades 6 to 8 of General Basic Education as the proportional reasoning level of the problem increased. Similar results were obtained with respect to correct strategies. The most frequent incorrect strategies were the comparison of the first terms of ratios and additive comparisons. Virtually all students reached the first two proportional reasoning levels of Noelting, and as the course progressed, a higher proportion attained the following levels of reasoning, but few students achieved level IIIA, corresponding to formal operations, even in the highest grade (grade 10). **[Conclusions]** It was concluded that it is necessary to reinforce the teaching of reasoning about comparison of ratios, and to take it into account in the mathematical topics based on this reasoning.

Keywords: Evaluation; level of reasoning; proportionality; comparison of ratios; comparative study.

Resumo

[Objetivo] O objetivo deste estudo foi avaliar o nível de raciocínio proporcional e estratégias em problemas de comparação de proporções de estudantes costarriquenhos e espanhóis entre 11 e 16 anos. **[Metodologia]** Através de uma abordagem de pesquisa interpretativa, é proposto a 704 alunos um de dois questionários com três itens sobre comparação de proporções (no total seis níveis diferentes de raciocínio proporcional, segundo Noelting). São apresentados o percentual de respostas corretas e os níveis de raciocínio proporcional e o resultado de uma análise de conteúdo das estratégias corretas e incorretas. **[Resultados]** A maioria dos alunos responde corretamente aos problemas de Noelting com um menor nível de raciocínio proporcional (IA a IIA), diminuindo essa proporção no 6° ao 8° ano da Base Nacional Comum, aumentando o nível de raciocínio proporcional do problema. Resultados semelhantes são obtidos com relação às estratégias corretas. As estratégias incorretas mais frequentes foram comparação dos primeiros termos das razões e comparações aditivas. Praticamente todos os alunos atingem os dois primeiros níveis de raciocínio proporcional de Noelting, e à medida que o curso avança, uma proporção maior atinge os seguintes níveis de raciocínio, mas um pequeno número de alunos, mesmo no décimo ano do Ensino Diversificado, não atinge o nível IIIA correspondente às operações formais. **[Conclusões]** Conclui-se a necessidade de reforçar no ensino o raciocínio sobre comparação de razões, e levá-lo em conta nos tópicos matemáticos baseados nesse raciocínio.

Palavras-chave: avaliação; nível de raciocínio; proporcionalidade; comparação de proporções; estudo comparativo.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470

Introducción

El razonamiento proporcional tiene un papel relevante en los currículos escolares de Matemática, debido a sus conexiones con temas de geometría, álgebra, estadística y probabilidad, constituyéndose un componente del pensamiento formal y base del razonamiento algebraico elemental; además de su aplicabilidad en la resolución de problemas de la vida real (Lamon, 2007).

El número racional se estudia tanto en España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD, 2014; 2015) como en Costa Rica (Ministerio de Educación Pública, MEP, 2012). En Educación Primaria se introduce el concepto de fracción, su lectura, escritura, representación gráfica, relación de orden y operaciones básicas, para posteriormente diferenciar entre las fracciones propias e impropias. También se introducen las fracciones equivalentes y se emplean porcentajes simples y regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa para resolver problemas de la vida cotidiana. En los dos primeros años de Educación Secundaria, en ambos países, se siguen utilizando los números fraccionarios y distintas estrategias de cálculo para simplificar las operaciones. En 1º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España y 7º curso de Educación General Básica (EGB) en Costa Rica se trata la proporcionalidad inversa. En 8º curso de EGB se introduce el concepto de número racional y sus propiedades; mientras que en España se incorpora en 3º curso de la ESO. En los siguientes cursos no aparecen de forma directa nuevos contenidos asociados al razonamiento proporcional, aunque sigue estando presente de manera indirecta este tipo de razonamiento en la resolución de diversos problemas.

El progreso en el razonamiento proporcional supone un largo periodo de tiempo, y finaliza en la transición de las operaciones concretas a las operaciones formales (Lamon, 2007; Post *et al*., 1988). Aun así, el sujeto puede tardar algunos años para resolver las tareas que corresponden a su desarrollo lógico (Van Dooren *et al*., 2018) y gran cantidad de estudiantes encuentra dificultades en el razonamiento proporcional después de la instrucción (González-Forte, 2022; Noelting, 1980a, 1980b; Pérez-Echeverría *et al*., 1986; Van Dooren *et al*., 2018).

Por todo ello, ha recibido un gran interés en la investigación didáctica, como se recoge en trabajos de síntesis, tales como Behr *et al*. (1992); Ben-Chaim *et al*. (2012); Carpenter *et al*. (1993); Kieren (2020); Lamon (2007); o Van Dooren *et al*. (2018). Sin embargo, no se cuenta con investigaciones realizadas en Costa Rica ni estudios comparativos con estudiantes de España. Considerando esta carencia, el objetivo de este trabajo es realizar un estudio comparado del razonamiento proporcional en tareas de comparación de razones con estudiantado costarricense y español de 11 a 16 años de edad.

Marco teórico

La investigación realizada se sustenta en elementos teóricos sobre la razón, proporción y comparación de razones, el desarrollo evolutivo del razonamiento proporcional y los antecedentes del trabajo, que se describen a continuación.

Razón, proporción y estrategias de comparación de razones

El razonamiento proporcional permite establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y extenderla a otro par. Más

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

concretamente: “Sustenta afirmaciones hechas sobre las relaciones estructurales entre cuatro cantidades (a, b, c, d) en un contexto que simultáneamente involucre la covariación de cantidades y la invariancia de razones o productos” (Lamon, 2007, p. 637).

Este razonamiento se puede considerar desde el punto de vista intuitivo, caracterizado por el uso de argumentos cualitativos en la comparación de razones o formalmente por la aplicación de procedimientos aritméticos y algebraicos-funcionales. Lamon (2007) diferencia las siguientes interpretaciones del número racional (un estudio de los niveles de algebrización implicados se puede consultar en Burgos y Godino, 2020):

- *La relación parte-todo*. En ella el símbolo a/b indica la parte del todo contenida en una determinada cantidad. Se introduce en la escuela, desde edades muy tempranas, utilizando el área o la recta numérica (Tournaire y Pulos, 1985).
- *Cociente*. Aparece al dividir un número natural por otro y el símbolo a/b indica una operación. Permite introducir la clase de equivalencia de fracciones que representan el mismo número racional (Behr *et al*., 1983).
- *Razón*. Es una relación que permite introducir las magnitudes intensivas como la velocidad y puede considerarse como un índice comparativo entre dos números. Se dividen dos cantidades entre sí y se cuantifica una relación multiplicativa entre dos magnitudes (Behr *et al*., 1983).
- *Proporción*. Se construye sobre la igualdad de dos razones. Cuatro variables, a, b, c y d ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) formarán una relación proporcional en las dos situaciones siguientes (Ben-Chaim *et al*., 2012, pp. 33-34):

1. Cuando a / b = c / d. Se trata de una proporción directa: el cociente de las dos partes de la razón, a y b, es constantemente igual al de c y d.
2. Cuando $a \times b = c \times d$. Se trata de una proporción indirecta: el producto de las dos partes de la razón, a y b, es constantemente igual al de c y d.

En este trabajo se utiliza la proporción, y más concretamente, los problemas de mezcla, en los que se comparan dos razones con la misma unidad de medida de las magnitudes implicadas (número de vasos de zumo o de agua). En la investigación sobre este tema se han identificado las siguientes estrategias (Tournaire y Pulos, 1985):

- *Estrategias correctas:* a) estrategias multiplicativas donde los términos de una razón se relacionan multiplicativamente con los de la otra, generalmente entre el numerador y denominador de cada razón o los numeradores y denominadores de las dos razones; b) *correspondencia*, es un método válido para problemas sencillos o cuando no se cuenta con el cálculo de fracciones, y consiste en establecer una relación dentro de una razón y extenderla a la segunda o establecer relaciones multiplicativas entre términos homólogos de las dos razones, utilizando en caso necesario alguna operación aditiva.
- *Estrategias incorrectas:* usar solo una parte de los datos, por ejemplo, comparar solo los numeradores de las razones, realizar comparaciones aditivas, restando los elementos de cada razón o usar una unidad arbitraria de comparación.

También se ha observado que, aunque un estudiante sea capaz de usar una

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

estrategia multiplicativa en un problema, suele utilizar estrategias aditivas cuando no es capaz de resolver otro.

Desarrollo del razonamiento proporcional

Entre los trabajos pioneros sobre el desarrollo del razonamiento proporcional destaca el de Inhelder y Piaget (1958), quienes indican que la etapa de pre-proporcionalidad supone la coordinación de funciones, mientras la de proporcionalidad implica la coordinación de operaciones. Las primeras estrategias de comparación de fracciones son aditivas, pues los niños y las niñas creen que la equivalencia de razones implica la igualdad de diferencia entre los términos. Seguidamente, aparece un periodo donde se usan comparaciones aditivas suponiendo que las diferencias cambian en función del tamaño de los números. Continúa una etapa de operaciones lógicas, donde se comprende la relación entre los cuatro términos de una proporción y que a/b=c/d implica que al aumentar *a*, debe disminuir *d*.

Noelting (1980a, 1980b) amplió estos estudios. El autor planteó el problema de mezcla de agua y zumo de naranja, expresando cada mezcla como un par ordenado (a_1, b_1) y (a_2, b_2), donde el primer término corresponde al número de vasos de zumo de naranja (a) y el segundo al número de vasos de agua (b). Cada etapa involucra estrategias y razonamientos para resolver problemas cada vez más complejos.

El periodo *preoperacional* o *intuitivo* está caracterizado por estrategias que se basan en comparar en valor absoluto términos de la razón (niveles IA, IB e IC). En el de *operaciones concretas* las estrategias conducen a la construcción de un par ordenado (etapa IIA) o pares ordenados (niveles IIA, IIB). Cuando las comparaciones se realizan después de reconstruir mentalmente equivalencias se da el periodo de *operaciones formales* (IIIA y IIIB). Se añade una etapa *simbólica*, donde solo se comparan elementos. Las estrategias características en cada nivel son las siguientes:

- *Nivel 0: simbólico.* Se diferencian los dos elementos en cada conjunto a comparar.
- *Nivel IA: intuitivo inferior*. La estrategia que se aplica es la comparación de los primeros términos (a_1 y a_2) sin tener en cuenta los segundos (b_1 y b_2).
- *Nivel IB: intuitivo medio*. Al observar que los primeros términos son iguales ($a_1=a_2$), se comparan los segundos, que se perciben como recíprocos de los primeros.
- *Nivel IC: intuitivo superior.* Se constituye la razón y se comparan las dos relaciones internas en los términos de las razones que se aceptan como complementarias. Por ejemplo, si $a_1<a_2$ y $b_1>b_2$ entonces (a_1, b_1) < (a_2, b_2).
- *Nivel IIA: operacional concreta inferior*. Se determina por la clase de equivalencia de la unidad ($a_1/b_1=a_2/b_2=1$). Las cuatro relaciones entre términos (correspondencias) deben tenerse en cuenta y surge la necesidad de emplear la multiplicación.
- *Nivel IIB: operacional concreta superior*. Se caracteriza por la clase de equivalencia diferente a la unidad ($a_1/b_1 = a_2/b_2 = m/n$).
- *Nivel IIIA: operacional formal inferior.* Surge una estrategia nueva, que combina multiplicación y suma. El sujeto primero identifica una relación en la primera razón, y luego la compara con la segunda razón a través de una operación aditiva. Por ejemplo, si $ma_1=b_1$, y $ma_2>b_2$, entonces (a_1, b_1) < (a_2, b_2).

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470

- *Nivel IIIB: operacional concreta superior.* Se comparan fracciones cualesquiera, generando dos fracciones equivalentes a las dadas con común denominador, y se realiza una comparación aditiva adicional de los primeros términos de las nuevas fracciones.

Antecedentes

Una amplia investigación evalúa diferentes componentes del razonamiento proporcional de estudiantes, y se ha recogido en trabajos de síntesis, como los de Ben-Chaim *et al*. (2012); Kieren (2020) y Lamon (2007). En estas investigaciones se utilizan variadas tareas aplicadas a estudiantes de diferentes edades, por ejemplo, Gómez y Dartnel (2019) estudian la comparación de fracciones numéricas por 502 estudiantes de 6º a 8º de EGB en Chile. Los autores señalan el sesgo del número natural, que consiste en suponer mayor la fracción cuando los números que la conforman son mayores (ver también González-Forte *et al*., 2022).

He *et al*. (2018) sugieren que los niños y las niñas pueden razonar proporcionalmente antes del periodo de operaciones formales. Por ello, Vanluydt *et al*. (2022a) proponen a 315 sujetos de 5 a 8 años problemas proporcionales de reparto equitativo, y observan un inicio de este razonamiento en los 8 años. También indican que tienen una preferencia por relaciones aditivas o multiplicativas y tienen más éxito en problemas elementales de razonamiento proporcional (Vanluydt *et al*., 2022b).

Boyer y Levine (2015) utilizaron problemas de mezcla similares a los del presente estudio, con estudiantes de 8 y 10 años, quienes tuvieron mucha dificultad al ser las unidades utilizadas (vasos de zumo y de agua) discretas, mientras la mezcla es un continuo. Mostraron tendencia a comparar las cantidades aditivamente y no proporcionalmente. Con 30 estudiantes de 5 y 6 años, He *et al*. (2018) también emplearon problemas de mezclas, representándolas mediante rectángulos coloreados de la misma base y diferente altura. Concluyeron que solo una parte del estudiantado era capaz de reconocer la proporcionalidad cuando las fracciones a comparar eran equivalentes.

Otros trabajos sobre razonamiento proporcional, con cuestionarios más generales, no centrados en los problemas de comparación de fracciones, son los de Butto *et al*. (2019) con 109 estudiantes de 4º y 5º grados de primaria y 1º grado de secundaria y el de Fernández y Llinares (2012) con 755 estudiantes con problemas aditivos y proporcionales (con cantidades discretas y continuas).

La investigación que más se relaciona con este estudio es la de Pérez-Echeverría *et al*. (1986), quienes propusieron a 20 estudiantes de 12 años y otros grupos de 20 de 17-18 años 10 problemas de comparación de razones, similares a los que utilizaremos en este trabajo que se describen en la sección de metodología. Los autores establecen cuatro niveles de dificultad en los problemas, de acuerdo con la estrategia de resolución necesaria:

- *Nivel 1:* problemas donde el numerador o denominador de cada razón es el mismo y se pueden resolver sin formar las razones.
- *Nivel 2:* hay proporcionalidad entre los numeradores y denominadores de cada razón o entre los dos numeradores y los dos denominadores, es decir, se trabaja con fracciones equivalentes. Se resuelven estableciendo una correspondencia entre dos términos de una razón y comparándola con la relación entre los dos términos de la otra.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

- *Nivel 3:* problemas que presentan proporcionalidad solo entre los numeradores o entre los denominadores de las dos razones. Se resuelven mediante correspondencia de dichos términos.
- *Nivel 4:* no existe relación alguna de proporcionalidad entre los cuatro términos. Requieren comparación de fracciones, reduciendo previamente a fracciones equivalentes.

Solo el 12 % de los sujetos de su muestra usaron la comparación multiplicativa en las tareas. Además, algunos sujetos que habían usado una estrategia proporcional para resolver problemas de nivel de dificultad 2 o 3 volvían a las estrategias aditivas o de comparación de cantidades absolutas para resolver los de nivel de dificultad 4. También hubo mayor uso de estrategias de correspondencia en los estudiantes de más edad (50 %).

Los trabajos realizados con estudiantes de España han utilizado únicamente muestras pequeñas y no incluyen todas las edades en que se supone se lleva a cabo el desarrollo evolutivo del concepto; además, muchos estudios han utilizado cuestionarios centrados en tareas diferentes a la comparación de razones. Por otro lado, no se han encontrado trabajos de este tipo en Costa Rica. Para complementar estos trabajos, se analiza el razonamiento proporcional en este tipo de tareas de estudiantes costarricenses desde los 11 a los 16 años y se comparan con estudiantado español de la misma edad.

Metodología

El enfoque de la investigación es interpretativo, centrado en comprender un fenómeno educativo, como es el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de 11 a 16 años de edad. Para ello se analizan elementos cualitativos deducidos de las respuestas a un cuestionario (Cerrón, 2019; Gil *et al*., 2017).

Muestra participante

La muestra estuvo formada por 704 estudiantes, 292 costarricenses y 412 españoles y españolas, que se distribuyeron en el último curso de educación primaria (6º de Educación General Básica EGB en ambos países) y cada uno de los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) española y cursos equivalentes (7º a 9º de EGB y 10º del Ciclo Diversificado CD) en Costa Rica, con la composición que se presenta en la Tabla 1, junto con el tipo de cuestionario (A o B) asignado a cada estudiante, que se describe en la siguiente sección. Se realizó un muestreo de conveniencia (Otzen y Manterola, 2017), seleccionando instituciones educativas por

Tabla 1. *Composición de la muestra, según curso escolar, país y cuestionario*

Curso	Cuestionario A		Cuestionario B		Total	
	Costa Rica	**España**	**Costa Rica**	**España**	**Costa Rica**	**España**
6ºEGB	35	39	33	39	68	78
7ºEGB/1ºESO	26	43	26	37	52	80
8ºEGB/2ºESO	31	32	33	31	64	63
9ºEGB/3ºESO	26	50	26	46	52	96
10ºED/4ºESO	27	55	29	40	56	95
Total	**145**	**219**	**147**	**193**	**292**	**412**

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, Nº. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

su ubicación geográfica y disponibilidad de colaboración. En España, participaron cuatro centros educativos públicos, dos de educación primaria, uno de Almería y otro de Granada, y dos de educación secundaria, uno de Almería y otro de Sevilla. La muestra de estudiantes costarricenses se tomó de una única institución privada de la provincia de Cartago.

Cuestionario utilizado

Como se ha indicado, a cada sujeto se le proporcionó uno de dos cuestionarios A y B, cada uno con tres problemas de comparación de razones, de nivel de razonamiento proporcional creciente y similares a los empleados por Boyer y Levine (2015); Noelting (1980a, 1980b); Karplus *et al*. (1983); Pérez Echeverría, *et al*. (1986) y Tournaire y Pulos (1985). En conjunto, entre los dos cuestionarios se propusieron problemas de seis niveles diferentes de razonamiento proporcional, de acuerdo con Noelting (1980a, 1980b). Cada uno de los cuestionarios se dio a la mitad de los sujetos de cada curso escolar y país, de modo que se tuviese aproximadamente igual número de estudiantes de las mismas características respondiendo cada ítem (Tabla 1). La razón de partir el cuestionario en dos partes fue evitar la repetición de la respuesta al avanzar en la resolución de muchos ítems similares. En la Tabla 2 se especifican las características de cada uno de los ítems, ordenados en la tabla por nivel creciente de razonamiento proporcional (Noelting 1980a, 1980b). En estos ítems, se pide comparar dos razones (a_1, b_1) y (a_2, b_2), donde el primer término de cada par es el numerador (o dividendo) de la razón *vasos de zumo/vasos de agua* y el segundo el denominador (o divisor).

En la Figura 1 se presenta el ítem 1 (cuestionario A), donde se comparan las razones (2, 3) vs. (1, 3). Los otros cinco ítems tienen la misma estructura, variando el número de vasos de zumo y de agua.

Categorías de estrategias utilizadas en el análisis

Con las respuestas al cuestionario se realizó un análisis de contenido (Krippendorff, 2013), que permite establecer categorías de modo objetivo como resultado del análisis sistemático realizado. Este análisis se complementa con información numérica que se muestra mediante tablas para el porcentaje de respuestas correctas y de cada estrategia en cada ítem, así como de niveles de razonamiento proporcional por curso.

Tabla 2. *Ítems del cuestionario según nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a, 1980b) y nivel de dificultad (Pérez Echeverría et al., 1986)*

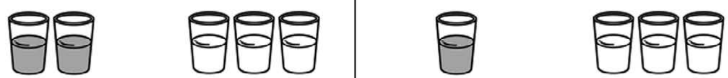
Ítem	Cuestionario	Razones por comparar (a_1, b_1) vs (a_2, b_2)	Nivel de razonamiento proporcional Noelting	Edad esperada (años-meses)	Nivel de dificultad P. Echeverría
1	A	(2, 3) vs (1, 3)	IA. Intuitiva inferior	(3-6)	1
2	B	(5, 1) vs (5, 4)	IB. Intuitiva media	(6-4)	1
3	A	(2, 2) vs (4, 4)	IIA. Operacional concreta inferior	(8-1)	2
4	B	(3, 1) vs (6, 2)	IIB. Operacional concreta superior	(10-5)	2
5	A	(3, 1) vs (4, 2)	IIIA. Operacional formal inferior	(12-2)	3
6	B	(3, 2) vs (4, 3)	IIIB. Operacional formal superior	(15-1)	4

Nota: Fuente propia de la investigación.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470

Elena y Juan preparan limonada. Elena mezcla 2 vasos de zumo de limón con 3 vasos de agua. Juan mezcla 1 vaso de zumo de limón con 3 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

Elena		Juan	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua



¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

( ) **La de Elena. (Opción correcta)**
( ) La de Juan.
( ) Las dos igual.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Figura 1. *Enunciado del ítem 1.*
Fuente propia de la investigación.

La clasificación de las estrategias que puede utilizar el estudiantado para resolver las tareas planteadas parte de las identificadas en trabajos previos (Noelting, 1980a, 1980b; Pérez-Echeverría *et al.*, 1986; Tournaire y Pulos, 1985) y se fue completando mediante el análisis de contenido. A continuación, se describen las estrategias previstas, agregando un ejemplo de respuesta de un estudiante en cada una de ellas, indicando como "Ex" estudiante número x.

Comparar totales en cada razón, es decir, el total de vasos (zumo de limón y agua) en cada mezcla; por ejemplo, si $a_1+b_1 > a_2+b_2$ entonces $(a_1, b_1) > (a_2, b_2)$. No es correcta en ningún ítem del cuestionario, aunque podría generar respuestas correctas en el ítem 1. En el ejemplo E29, el argumento del estudiante no tiene fundamento lógico, aunque arroje una respuesta correcta para este ítem, porque, habiendo el mismo número de vasos de agua, en la primera mezcla hay más sabor a limón porque tiene mayor cantidad de vasos de zumo de limón que la segunda mezcla.

E29: Porque Elena ha mezclado más limonada que Juan (ítem 1, opción correcta).

Comparan los primeros términos de las razones, sin considerar los segundos términos. Da respuestas correctas solo cuando los segundos términos son iguales ($b_1 = b_2$) y la pueden utilizar estudiantes que se encuentran en el nivel de razonamiento proporcional intuitivo inferior (IA) de Noelting (1980a, 1980b) (Ver E346). El alumnado debe diferenciar los dos términos de la razón. En el estudio sería una estrategia correcta para el ítem 1, correspondiente al nivel IA.

E346: Porque tiene más zumo (ítem 1, opción correcta).

Comparar los segundos términos "b" de las razones. Da respuestas correctas si los primeros términos son iguales ($a_1 = a_2$). El alumnado debe comprender que con el mismo numerador la razón es mayor si el denominador es más pequeño; lo que requiere entender que "b" es el recíproco de

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

"a". Corresponde al nivel intuitivo medio (IB) de Noelting (1980a, 1980b). Esta estrategia incluye a la anterior, puesto que primero debe comparar los primeros términos y notar que son iguales. En el estudio daría respuestas correctas en el ítem 2 (Ver E172), de nivel IB, por ejemplo:

E172: Porque Elena tiene un vaso de agua y Juan tiene cuatro (ítem 2, opción correcta).

Comparar la diferencia entre los términos de cada razón. Considera los cuatro términos, pero realiza comparaciones aditivas, analizando la diferencia entre términos. Según Noelting (1980a, 1980b) el estudiantado construye la razón como un todo, analizando las relaciones internas entre sus términos. Corresponde al nivel intuitivo superior (IC) de Noelting (1980a, 1980b), y en el estudio sería correcta para los ítems 1 y 2 del cuestionario (Ver E39).

E39: Porque la de Elena tiene un vaso más de agua que de zumo y la de Juan tiene dos vasos más de agua que de zumo (ítem 1, opción correcta).

Relación de equivalencia a la unidad. Se compara el valor de una razón (a_1/b_1) con la otra razón (a_2/b_2), es decir, se utiliza una operación multiplicativa aplicada a los términos de ambas razones, encontrando que son equivalentes a la unidad. Esta estrategia implica la diferenciación y combinación no solo de la razón entre los términos dentro de una misma razón (a_1/b_1) sino también de dicha razón con la otra (a_1/a_2). Da respuestas correctas solo cuando los términos en cada una de las razones sean iguales y corresponde al nivel operacional concreto inferior (IIA) de Noelting (1980a, 1980b). En el estudio sería válida para el ítem 3.

E421: Porque ambas limonadas tienen la misma cantidad de zumo y agua en diferentes litros (ítem 3, opción correcta).

Relación de equivalencia entre razones. Se compara el valor de una razón (a_1/b_1) con la otra razón (a_2/b_2), encontrando equivalencia entre las mismas. Esta estrategia dará respuestas correctas solo cuando las razones pertenezcan a una misma clase de equivalencia de fracciones, cuya comprensión es un paso esencial en el razonamiento proporcional (Vanluydt *et al*., 2022a). Corresponde al nivel operacional concreto superior (IIB) de Noelting (1980a, 1980b) y en el estudio sería una estrategia correcta para el ítem 4.

E317: Porque la cantidad de limonada de Elena es menor y el agua también, los de Juan son como si se multiplicara por 2 (ítem 4, opción correcta).

Correspondencia entre términos de las razones. Se establece un criterio de proporcionalidad entre los términos de una razón (a_1/b_1), para luego comparar si la relación en la otra razón (a_2/b_2) es menor o mayor (Ver E506). Este tipo de estrategias darán respuestas correctas siempre y cuando dos de los cuatro términos a comparar sean múltiplos. Corresponde al nivel operacional formal inferior (IIIA) de Noelting (1980a, 1980b). En el estudio sería correcto utilizarla en el ítem 5 en el cuestionario y los anteriores.

E506: Está concentrado en menos cantidad de agua. Por cada vaso son 3 de limón por lo que Juan debía usar 6 vasos de limón par ser igual de ácido que Elena (ítem 5, opción correcta).

Proporcionalidad. Se reducen las razones a fracciones con común denominador

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

y se comparan. Con esta estrategia se logra comparar cualquier tipo de razones, por lo que se pueden obtener respuestas correctas para todos los ítems del cuestionario. Corresponde al nivel operacional formal superior (IIIB) de Noelting (1980a, 1980b).

E80: Porque el porcentaje de zumo de limón en la limonada de Elena (60%) es mayor que el de Juan (57%) (Ítem 6, opción correcta).

Análisis y resultados

A continuación, se analizan las respuestas correctas en cada ítem, país y curso, las estrategias empleadas y nivel de razonamiento proporcional (Noelting 1980a, 1980b).

Respuestas correctas en cada ítem

En la Tabla 3 se presenta el porcentaje de estudiantes en cada nivel escolar y país que eligió la opción correcta en cada ítem. Conforme aumenta el nivel de razonamiento proporcional del ítem requerido para resolver las tareas (Noelting 1980a, 1980b), el porcentaje de respuestas correctas disminuye, siendo pequeño (entre 15,2 % y 37,5 %, según curso y país) en el ítem 6 (nivel IIIB). Hay que recordar que la edad promedio esperada para alcanzar el nivel de razonamiento IIIB según Noelting (1980a, 1980b) es de 15 años y un mes, por lo que la mayor parte de estudiantes del último curso debieran haberlo alcanzado y resolver correctamente dicho ítem.

Casi la totalidad de estudiantes, independientemente del curso y país, responde correctamente los ítems 1 y 2, correspondiente a los niveles de razonamiento proporcional IA y IB de Noelting (1980a, 1980b), obteniendo resultados similares a la tarea del mismo nivel de dificultad (nivel 1) en Pérez-Echeverría *et al*. (1986), para estudiantes de cursos equivalentes. En los demás ítems, los porcentajes de respuestas correctas aumentan con el curso, lo que se explica por la mayor edad e instrucción. Sin embargo, es evidente que no todo el estudiantado alcanza cada nivel de razonamiento proporcional en esta tarea a la edad esperada por Noelting (1980a, 1980b).

Al comparar los resultados en los dos países, los porcentajes de corrección son similares en los cursos 6º de EGB y 1º de ESO/ 7º de EGB. En los demás cursos, a partir del nivel IIA los porcentajes de corrección en estudiantes costarricenses (excepto en el ítem IIIA para estudiantes de 3º de ESO/9º de EGB) tienden a ser un poco inferiores al del estudiantado español. En el ítem 6, que requería el nivel IIIB, se obtuvo, a partir de 2ºESO, porcentajes de corrección superiores al 30 % en estudiantado español, y fueron inferiores en todos los cursos los resultados de estudiantes costarricenses. Para esta tarea, los promedios de respuestas correctas fueron 33,1 % (España) y 22,2 % (Costa Rica) de la muestra. Este ítem se

Tabla 3. *Porcentaje de estudiantes que elige la opción correcta por ítem y país*

Ítems	Nivel Noelting	6ºEGB		7ºEGB/1ºESO		8ºEGB/2ºESO		9ºEGB/3ºESO		10ºED/4ºESO	
		CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.
1	IA	91,4	89,7	92,3	88,4	90,3	93,8	92,3	86,0	96,3	94,5
2	IB	90,9	87,2	96,2	91,9	97,0	96,8	100,0	95,7	96,6	92,5
3	IIA	65,7	64,1	69,2	79,1	80,6	84,4	76,9	82,0	70,4	94,5
4	IIB	30,3	28,2	42,3	40,5	48,5	71,0	53,8	71,7	58,6	77,5
5	IIIA	40,0	41,0	57,7	46,5	48,4	59,4	50,0	36,0	48,1	58,2
6	IIIB	15,2	17,9	23,1	27,0	18,2	35,5	26,9	32,6	27,6	37,5

Nota: Fuente propia de la investigación.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470

categoriza en el mayor nivel de razonamiento proporcional en Noelting (1980a, 1980b) y mayor nivel de dificultad en Pérez Echeverría *et al*. (1986).

Por otro lado, al considerar toda la muestra, los porcentajes de corrección son muy similares a obtenidos por Noelting (1980a, 1980b) en ítems equivalentes según nivel de razonamiento proporcional requerido: IA (91,0 % vs. 99,4 % en Noelting (1980a, 1980b)), IB (94,0 % vs. 95,6 % en Noelting (1980a, 1980b)), IIA (77,0 % vs. 78,2 % en Noelting (1980a, 1980b)), IIB (41,2 % vs. 48,6 % en Noelting (1980a, 1980b)), IIIA (47,3 % vs. 43,9 % en Noelting (1980a, 1980b)), IIIB (26,5 % vs. 15,6 % en Noelting (1980a, 1980b)). Hay que hacer la salvedad de que la muestra de Noelting (1980a, 1980b) es de 6 a 16 años y la de este estudio es de 11 a 16 años; sin embargo, es notable la similitud en cuanto a la proporción de respuestas correctas.

Estrategias correctas

En la Tabla 4 se presenta el porcentaje de estudiantes que usa diferente tipo de estrategia correcta en cada curso y país, para cada ítem. Se considera que una estrategia es correcta en un ítem si aporta la solución matemáticamente válida. Como se puede apreciar en esta tabla, en los ítems 1 y 2 (niveles IA e IB) las estrategias más utilizadas fueron la comparación del valor absoluto del primero o segundo término de la razón y comparación de diferencias entre los términos. Entre estas tres estrategias, los porcentajes suman más de dos terceras partes del estudiantado en estos ítems en cada curso y país.

Tabla 4. *Porcentaje de estrategias correctas por ítem y país*

		6ºEGB		7ºEGB/1ºESO		8ºEGB/2ºESO		9ºEGB/3ºESO		10ºED/4ºESO	
Estrategia	**Ítem**	**CR**	**Esp.**	**CR**	**Esp.**	**CR**	**Esp.**	**CR**	**Esp.**	**CR**	**Esp.**
Comparar primeros términos	1(IA)	54,3	71,8	69,2	72,1	58,1	50,0	53,8	40,0	51,9	50,9
Comparar segundos términos	2(IB)	45,5	51,3	76,9	59,5	60,6	51,6	53,8	47,8	34,5	40,0
Comparar diferencias	1(IA)	22,9	10,3	7,7	9,3	32,3	18,8	11,5	30,0	29,6	20,0
	2(IB)	42,4	17,9	15,4	27,0	15,2	41,9	26,9	28,3	37,9	27,5
Equivalencia a la unidad	3(IIA)	68,6	51,3	65,4	69,8	58,1	62,5	57,7	62,0	59,3	45,5
Equivalencia de razones	4(IIB)	24,2	17,9	30,8	35,1	24,2	64,5	23,1	54,3	41,4	30,0
Correspondencia	1(IA)			3,8						3,7	
	2(1B)					3,0					
	3(IIA)				7,0	3,2					
	4(IIB)		5,1	3,8	2,7	6,1		3,8	2,2		2,5
	5(IIIA)	11,4	7,7	11,5	16,3	19,4	43,8	26,9	12,0	25,9	20,0
Proporcionalidad	1(IA)							11,5	4,0	3,7	18,2
	2(IB)										
	3(IIA)		2,6	3,8	2,3	3,2	12,5	11,5	10,0	11,1	40,0
	4(IIB)	3,0		3,8	2,7	9,1	3,2	15,4	8,7	10,3	37,5
	5(IIIA)		2,6	3,8			6,3	3,8	10,0	11,1	30,9
	6(IIIB)				5,4	3,0	9,7	7,7	8,7	10,3	30,0

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, Nº. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

En el ítem 3 (nivel IIA), más de la mitad de estudiantes de cada curso identifican que en las razones representadas existe una relación de equivalencia a la unidad, y excepto en 4º curso de la ESO, otras estrategias de mayor nivel de razonamiento proporcional fueron usadas por menos del 12,5 %.

En el ítem 4 (nivel IIB), predomina utilizar la equivalencia de razones. A excepción de los cursos 2º y 3º de la ESO y 10º de ED, menos de las dos quintas partes de cada curso utilizaron esta estrategia, y a excepción de 4º curso de la ESO, menos de una quinta parte por curso emplearon estrategias de mayor nivel de razonamiento proporcional.

En el ítem 5 (nivel IIIA), aparecen las estrategias de correspondencia y proporcionalidad, pero con pequeña frecuencia, que aumenta en los cursos superiores. El ítem 6 (nivel IIIB) solo se puede resolver correctamente utilizando la proporcionalidad, pero a excepción del 4º curso de ESO, menos del 11 % de estudiantes por curso utilizó esta estrategia. A partir del ítem 3, entre 30 % y 40 % de estudiantado español de 4º curso de la ESO empleó la proporcionalidad. En la investigación de Pérez-Echeverría *et al.* (1986) tan solo el 12,5 % de estudiantes del último curso de bachillerato, empleó estrategias proporcionales en la tarea de nivel 4 de dificultad; y resultó superior el porcentaje obtenido (30,0 %) en este estudio con estudiantado español de menor edad (4º de la ESO).

Para tener una visión más completa del uso de estrategias correctas, en la Tabla 5 se presentan los porcentajes totales estas estrategias para cada ítem por curso y país.

Se puede apreciar que conforme aumenta el nivel de Noelting (1980a, 1980b) en el ítem, disminuyen los porcentajes de estrategias correctas utilizadas, sobre todo del nivel IIA en adelante, lo que es razonable puesto que las estrategias que son válidas en estos ítems requieren un nivel mayor de razonamiento proporcional. En los ítems 1 y 2, que se pueden resolver correctamente mediante la comparación del valor absoluto de los términos de las razones y comparación de sus diferencias, los porcentajes de estrategias correctas son similares por curso, con una diferencia aproximada de 10 % entre un ítem y otro.

Los porcentajes de estrategias correctas aumentan (o se mantienen similares) con el curso. Hasta el nivel IIB, más de la mitad de estudiantes por curso y país realizan estrategias correctas; sin embargo, a partir de este nivel hay cursos que no alcanzan el 50 % de estrategias correctas. A partir del nivel IIA, el alumnado español obtiene porcentajes mayores de estrategias correctas respecto a estudiantes costarricenses (excepto en 6º curso de EGB).

Tabla 5. *Porcentaje total de estrategias correctas por ítem y país*

Ítems	Nivel Noelting	6ºEGB		7ºEGB/1ºESO		8ºEGB/2ºESO		9ºEGB/3ºESO		10ºED/4ºESO	
		CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.
1	IA	77,2	82,1	80,7	81,4	90,4	68,8	76,8	74,0	88,9	89,1
2	IB	87,9	69,2	92,3	86,5	78,8	93,5	88,4	78,3	79,3	77,5
3	IIA	68,6	53,9	69,2	79,1	64,5	75,0	69,2	72,0	70,4	85,5
4	IIB	27,2	23,0	38,4	40,5	39,4	67,7	42,3	65,2	51,7	70,0
5	IIIA	11,4	10,3	15,3	16,3	19,4	50,1	30,7	22,0	37,0	50,9
6	IIIB				5,4	3,0	9,7	7,7	8,7	10,3	30,0

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470

Estrategias incorrectas

Para completar el análisis de estrategias y comprender mejor los puntos difíciles en los diferentes ítems, se presenta la Tabla 6 con los porcentajes de diferentes estrategias incorrectas empleadas por curso y país. Una estrategia se considera incorrecta si es incorrecta en cualquier ítem o proporciona respuestas incorrectas en ítems específicos.

La estrategia incorrecta más utilizada fue la comparación de las diferencias entre los dos términos de las razones (que es correcta solo para los ítems 1 y 2). Se ha usado en los ítems 3 a 6, que requieren estrategias multiplicativas, por estudiantes que no alcanzan el nivel de razonamiento proporcional requerido para resolverlas (Tournaire y Pulos, 1985). Un ejemplo se muestra a continuación.

E458: Porque en ambos hay un vaso menos de agua que de zumo de limón. (Ítem 6, opción incorrecta).

Tabla 6. *Porcentaje de estrategias incorrectas por ítem y país*

		6ºEGB		7ºEGB/1ºESO		8ºEGB/2ºESO		9ºEGB/3ºESO		10ºED/4ºESO	
Estrategia	**Ítems**	**CR**	**Esp.**	**CR**	**Esp.**	**CR**	**Esp.**	**CR**	**Esp.**	**CR**	**Esp.**
Comparar totales	1(IA)	11,4	7,7	3,8	2,3		9,4	3,8	4,0		1,8
	2(IB)		2,6							6,9	
	3(IIA)	2,9	7,7					7,7	2,0		
	4(IIB)	3,0	5,1		5,4					6,9	
	5(IIIA)	5,7					3,1				1,8
	6(IIIB)		2,6	15,4	5,4	3,0					
Comparar primeros términos	2(IB)	3,0	15,4	3,8	8,1	12,1	3,2	3,8	6,5	10,3	2,5
	3(IIA)	11,4	15,4	7,7	9,3	16,1	6,3	7,7	8,0	7,4	1,8
	4(IIB)	18,2	38,5	19,2	24,3	15,2	6,5	23,1	15,2	13,8	12,5
	5(IIIA)	14,3	17,9	23,1	23,3	12,9	6,3	23,1	10,0	3,7	9,1
	6(IIIB)	3,0	12,8	7,7	13,5	3,0		7,7	8,7	10,3	5,0
Comparar segundos términos	1(IA)			7,7	2,3						
	3(IIA)		2,6	3,8	2,3	3,2	3,2		2,0		
	4(IIB)	3,0		3,8	5,4	9,1		3,8	4,3	6,9	2,5
	5(IIIA)	8,6	20,5	15,4	18,6	9,7	3,1	7,7	2,0	7,4	1,8
	6(IIIB)	6,1	7,7	7,7	13,5	6,1	16,1	15,4	13,0	6,9	7,5
Comparar diferencias	3(IIA)	5,7	10,3	3,8	2,3	6,5	6,1			3,7	7,3
	4(IIB)	48,5	23,1	23,1	16,2	24,2	16,1	19,2	4,3	17,2	5,0
	5(IIIA)	34,3	20,5	30,8	11,6	38,7	9,4	19,2	32,0	29,6	21,8
	6(IIIB)	72,7	46,2	42,3	35,1	51,5	45,2	46,2	34,8	44,8	27,5
Equivalencia a la unidad o de razones	1(IA)								2,0		
	2(IB)	3,0									
	5(IIIA)	5,7	2,6	3,8	4,6		9,4			7,4	
	6(IIIB)	9,1	12,9	7,7	2,7	9,1	9,7	3,8	2,2	6,9	2,5
Confusas, no matemáticas o no argumenta la estrategia	1(IA)	11,4	10,2	7,6	14,0	9,7	18,8	19,2	20,0	11,1	9,0
	2(1B)	3,0	12,8	0,0	5,4	6,1	3,2	0,0	15,2	0,0	20,0
	3(IIA)	11,5	10,3	15,3	7,0	9,7	18,7	15,4	16,0	18,5	5,4
	4(IIB)	0,0	10,3	15,3	8,1	12,2	6,4	11,5	10,8	3,4	10,0
	5(IIIA)	20,0	28,2	11,5	25,6	19,4	18,7	19,2	34,0	14,8	14,5
	6(IIIB)	3,0	18,0	15,3	24,3	21,3	12,9	19,2	30,4	13,8	25,0

Nota: Fuente propia de la investigación.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Esta estrategia aumenta a mayor nivel de dificultad del ítem. Interpretamos que al igual que en Pérez-Echeverría *et al*. (1986), algún estudiantado que empleó estrategias multiplicativas en ítems sencillos volvió a las aditivas en los problemas de mayor nivel de dificultad. Puede notarse, también, que esta estrategia es más frecuente en estudiantes costarricenses y se empleó más en el ítem 6, sobre todo por estudiantes de 6º curso de EGB (46,2 % estudiantado españole y 72,7 % costarricense). En Pérez-Echeverría *et al*. (1986), en la tarea de nivel 4 de dificultad, el 65 % de estudiantes de 8ºEGB usó estrategias aditivas; resultados parecidos se obtuvieron en este estudio en el ítem 6 (nivel 4), con estudiantes de edad similar (63,6 % en 8ºEGB y 61,3 % en 2ºESO).

Aunque en menor porcentaje, destaca también la comparación de los primeros términos de las dos razones, especialmente en el ítem 4, donde hay equivalencia entre razones (ver E57). Fue usada en este ítem por el 38,5 % de estudiantado español y el 18,2 % de costarricense de 6º de EGB.

E57: Porque Juan ha mezclado más limón que Elena. (Ítem 4, opción incorrecta).

También, aparecen estrategias confusas, en las que no queda claro cómo se obtuvo la respuesta, otras que emplean criterios subjetivos, donde no se usa alguna operación matemática o no se argumenta la respuesta seleccionada. De los ítems 1 al 4 los porcentajes no superaron el 20 %; se encontraron porcentajes mayores en los ítems 5 y 6, y sobresalió un mayor número de respuestas en blanco (estudiantes no supieron justificar), lo cual es normal debido a que son tareas de mayor dificultad.

El total de estrategias incorrectas se presenta en la Tabla 7. Lógicamente el comportamiento global es complementario al de las estrategias correctas, son más numerosas las incorrectas en los ítems de nivel superior, especialmente en los cursos 6º de EGB. El porcentaje global de estrategias incorrectas disminuye por curso, aunque es muy alto todavía en el último curso en los ítems 5 y 6 (Niveles IIA y IIIB).

El desarrollo de estas estrategias tiene bastante coincidencia en los dos países, con más variación por ítem, dentro de cada curso en España que en Costa Rica.

Nivel de razonamiento proporcional

En la Tabla 8 se presentan los porcentajes de estudiantes en cada nivel de razonamiento proporcional de Noelting (1980a, 1980b), por curso y país. Para calcular el nivel que corresponde al estudiantado se considera que haya resuelto correctamente el ítem asociado a dicho nivel (es decir, que proporcione en el ítem respuesta y argumento correcto) y todos los ítems de niveles inferiores. Se añade un Nivel 0, que

Tabla 7. *Porcentaje total de estrategias incorrectas por ítem y país*

Ítems	Nivel Noelting	6ºEGB		7ºEGB/1ºESO		8ºEGB/2ºESO		9ºEGB/3ºESO		10ºED/4ºESO	
		CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.
1	IA	22,8	17,9	19,3	18,6	9,6	31,2	23,2	26	11,1	10,9
2	IB	12,1	30,8	7,7	13,5	21,2	6,5	11,6	21,7	20,7	22,5
3	IIA	31,4	46,1	30,8	20,9	35,5	25	30,8	28	29,6	14,5
4	IIB	72,8	77	61,6	59,5	60,6	32,3	57,7	34,8	48,3	30
5	IIIA	88,6	89,7	84,7	83,7	80,6	49,9	69,3	78	63	49,1
6	IIIB	100	100	100	94,6	97	90,3	92,3	91,3	89,7	70

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Tabla 8. *Porcentaje de estudiantes según nivel de razonamiento proporcional alcanzado, por curso y país*

Nivel Noelting	6ºEGB		7ºEGB/1ºESO		8ºEGB/2ºESO		9ºEGB/3ºESO		10ºED/4ºESO	
	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.
Nivel 0	11,8	16,7	11,5	11,3	14,1	17,5	13,5	14,6	10,7	11,6
IA	11,8	17,9	11,5	6,25	12,5	0,0	5,8	6,3	10,7	4,2
IB	30,9	26,9	26,9	22,5	21,9	14,3	23,1	10,4	17,9	7,4
IIA	29,4	23,1	25,0	33,75	21,9	14,3	23,1	29,2	19,6	29,5
IIB	13,2	11,5	17,3	16,25	18,8	27,0	17,3	28,1	21,4	20,0
IIIA	2,9	3,8	5,8	8,75	9,4	22,2	13,5	8,3	14,3	18,9
IIIB			1,9	1,25	1,6	4,8	3,8	3,1	5,4	8,4

Nota: Fuente propia de la investigación.

corresponde a estudiantes que, habiendo completado los ítems no resolvieron correctamente ninguno de ellos, por fallar en la estrategia o la respuesta. Observamos en este nivel un porcentaje importante (entre 11,3 % y 17,5 %) en todos los cursos, que indica las dificultades que todavía tiene este estudiantado con el razonamiento proporcional. Es una cantidad pequeña de estudiantes la que alcanza el nivel superior IIIB ni siquiera en el último curso y hay coincidencia en los dos países.

En los cursos de 6º de EGB de los dos países, menos de la mitad de estudiantes consigue al menos el nivel IIA (Operacional concreto inferior); en estudiantes de España solo el 38,5 % y en costarricenses el 45,5 %. Esto implica que la mayoría de estudiantes se ubica en la etapa intuitiva, donde no llegan a comparar los cuatro términos de las dos fracciones. Puesto que en este curso tienen 11 o 12 años, se esperaría que la mayoría alcanzara el nivel IIA de Noelting (1980).

En los cursos equivalentes 1º curso de ESO y 7º de EGB (12-13 años), 60 % y 50 % de los estudiantes en España y Costa Rica, respectivamente, logran al menos un nivel IIA; sin embargo, se esperaría un nivel IIIA correspondiente a las operaciones formales.

En los cursos 2º de ESO, 3º de ESO y 4º de ESO (13 a 16 años) más de las dos terceras partes de estudiantes de España logra al menos un nivel de IIA y entre un 52 % y un 61 % de estudiantes de cursos equivalentes en Costa Rica. En estas edades habría que esperar el nivel de razonamiento proporcional IIIB en el curso superior según Noelting (1980), que poca cantidad de estudiantes alcanza.

En Noelting (1980a, 1980b), los porcentajes de estudiantes con edades similares se ubican en niveles de razonamiento proporcional superior: Estudiantes de 12 años (6ºEGB) el 82,4 % se ubica entre los niveles IIA y IIIA, de 13 años (7ºEGB/1ºESO) el 83,8 % está entre IIB y IIIA, de 14 años (8ºEGB/2ºESO) el 80 % se ubica entre los niveles de IIIA y IIIB, de 15 años (9ºEGB/3ºESO) la totalidad y 16 años (10ºED/4ºESO) casi la totalidad (94,7 %) alcanzan como mínimo el nivel IIB.

En resumen, aunque aumenta el porcentaje de los niveles de razonamiento superior, según el curso escolar, la edad a la que se alcanzan, al menos en el tipo de tareas propuestas en este trabajo, es algo superior a lo supuesto por dicho autor.

Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio comparado de las respuestas, estrategias y nivel de razonamiento proporcional, según

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Noelting (1980a, 1980b) en la comparación de razones. Los resultados obtenidos complementan los estudios sobre razonamiento proporcional en la comparación de razones, como los de Boyer y Levine (2015); Noelting (1980a, 1980b); Karplus, Pulos y Stage (1983) y Pérez-Echeverría *et al*. (1986), donde pocos resultados se han obtenido en España con muestras de tamaño razonable y no hay estudios comparados con otros países; es el primer trabajo que estudia esta problemática en Costa Rica y no hay estudios comparados en España con otros países.

El análisis de las respuestas a las tareas planteadas sugiere que estudiantes de la muestra realizan sin dificultad los ítems correspondientes a los primeros niveles de razonamiento proporcional de Noelting (1980a, 1980b) (etapas IA e IB), donde emplean estrategias de comparación de los valores absolutos de los numeradores o denominadores de las razones o bien estrategias aditivas. Esto concuerda con los resultados de Vanluydt *et al*. (2022b), donde se concluye que, al preferir relaciones aditivas, se tiene más éxito en problemas elementales de razonamiento proporcional. Dichas estrategias producen respuestas correctas en estos ítems, aunque no son válidas para el nivel superior.

No se evidenció ninguna dificultad asociada al uso de unidades discretas y mezcla continua como se encontró en Boyer y Levine (2015); ya que en los dos primeros ítems casi la totalidad de la muestra obtuvo respuestas correctas; utilizó las mismas unidades en todos los ítems. Las dificultades aparecen o van aumentando al requerirse estrategias multiplicativas, en concordancia con trabajos previos como el de Pérez Echeverría, *et al*. (1986), pues mucho estudiantado recurre otra vez a estrategias aditivas, que pueden encubrir el sesgo del número natural (Gómez y Dartnel, 2019; González-Forte *et al*., 2022) También, como se aprecia en los resultados obtenidos, se conserva la dificultad relativa de los problemas propuesta por Pérez-Echeverría *et al*. (1986), aunque la variedad de estrategias correctas e incorrectas ha sido mayor que las identificadas por dichos autores.

Al igual que en He *et al*. (2018), se concluye que un porcentaje considerable de estudiantes son capaces de reconocer la proporcionalidad cuando las fracciones a comparar son equivalentes; sin embargo, se encuentra que fue más sencillo identificar las que son equivalentes a la unidad, donde más de las dos terceras partes de estudiantes, sin importar curso y país, obtuvieron respuestas correctas, a diferencia de cuando las fracciones eran equivalentes, pero distintas a la unidad (ítem 4), donde solo los tres cursos españoles superiores sobrepasaron la mitad de respuestas correctas. El análisis de los niveles de razonamiento alcanzados en función del curso escolar (que corresponde a la diferente edad de estudiantes) contradice las edades promedio en que se debieran alcanzar estos niveles en el estudio de Noelting (1980a, 1980b) donde se espera que el 50 % de estudiantes logre el nivel operacional formal inferior (IIIA) a los 12 años y 2 meses de edad, y la misma proporción a los 15 años y 1 mes, en el nivel IIIB, niveles que son alcanzados por un tamaño de muestra mucho menor.

Fue poco el estudiantado que alcanzó el nivel IIIB, ni siquiera en el 10º curso, y apenas un 20 % el nivel IIIA (un poco más en España que en Costa Rica). Suponemos que es porque la proporción de estudiantes usando estrategias correctas de correspondencia y proporcionalidad fue pequeña, menor en Costa Rica que en España. En este sentido, se recomienda al profesorado

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

plantear en sus clases no solo problemas aritméticos, sino otros en que se deba emplear el razonamiento proporcional, como semejanza y homotecia, comparación de probabilidades y relaciones funcionales.

Es importante también tener en cuenta en cada país el nivel de razonamiento proporcional más frecuente en cada curso, para adaptar las tareas propuestas a dicho nivel y ayudar al estudiantado a progresar al inmediatamente superior. Así en Costa Rica el 45,5 % de estudiantes de 6º de EGB y el 50 % de 7º de EGB consigue al menos el nivel IIA operacional concreto; y entre un 52 % y un 61 % de estudiantes de cursos 8º a 10º. En España, por otra parte, el 38,5 % de estudiantes de 6º de EGB y el 60 % en 1º de ESO razona al menos al nivel IIA. En los cursos 2º de ESO, 3º de ESO y 4º de ESO (13 a 16 años) más de las dos terceras partes del estudiantado español logra al menos un nivel de IIA. Esta información puede permitir al profesorado diseñar tareas matemáticas que requieran este tipo de razonamiento de acuerdo con el nivel alcanzado según edad.

Además, en España se debiera ayudar a estudiantes a comprender que la comparación única del primer o segundo término de la razón solo es válida en caso de que el otro término sea igual a las dos razones. En Costa Rica, por otro lado, el mayor esfuerzo sería enfatizar en la comprensión del concepto de proporción, empleando distintas representaciones, ya que el alto porcentaje de estrategias como la comparación de totales de las dos fracciones y la diferencia de términos, revelan una débil comprensión de su significado.

Es importante tener en cuenta estos resultados en la enseñanza para mejorar en lo posible este razonamiento en el estudiantado, debido a su importancia en el inicio del razonamiento algebraico elemental y el desarrollo del pensamiento formal (Burgos y Godino, 2019; Kieren, 2020; Obando *et al*., 2014).

Igualmente se deben considerar las conexiones del razonamiento proporcional con otros temas matemáticos, como la probabilidad, magnitudes y funciones (Van-Dooren. 2018). Todos estos temas, donde el principal objetivo de aprendizaje no es el número racional (aunque permiten aplicarlo y reforzar su aprendizaje), pueden introducirse de manera efectiva, si los niveles de razonamiento proporcional de las tareas se controlan teniendo en cuenta las capacidades estudiantiles, según su edad.

Finalmente recordamos que la comparación de razones enfatiza la proporcionalidad, que es únicamente uno de los posibles significados del número racional (Behr *et al*., 1983; Burgos y Godino, 2020; Lamon, 2007). Por ello sugerimos la necesidad de continuar este trabajo comparando sus resultados con los obtenidos en otras tareas que involucren otros significados del número racional. Igualmente, sería de interés analizar la influencia del nivel de razonamiento proporcional de estudiantes en el desempeño de tareas que involucren este razonamiento de forma implícita, por ejemplo, la comparación de probabilidades.

Agradecimiento

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Conflicto de intereses

El equipo de autoría declara no tener ningún conflicto de interés.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Declaración de la contribución del equipo de autoría

El autor y la autora afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo. El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: L.H. 60 %. C.B. 40 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [**L.H.**], previa solicitud razonable.

Referencias

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–333). Macmillan.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). Academic Press.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4_2

Boyer, T. W. y Levine, S. C. (2015). Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. *Developmental Psychology, 51*(5), 615–620. https://doi.org/10.1037/a0039010.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 18,* 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Burgos, M., y Godino, J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática, 31*(3), 117-150.

Butto, C. M., Fernández, J. D., Araujo, D. C. y Ramírez, A. B. (2019). El razonamiento proporcional en educación básica. *Horizontes Pedagógicos, 21*(2), 39-52. https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.21204

Carpenter, T. P., Fennema, E., y Romberg, T. A. (Eds.). (1993). *Rational numbers: An integration of research.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203052624

Cerrón, W. (2019). La investigación cualitativa en educación. *Horizonte de la Ciencia, 9*(17), 1-8.

Fernández, C., y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Gil, J., León, J. y Morales, M. (2017). Los paradigmas de investigación educativa, desde una perspectiva crítica. *Conrado, 13*(58), 72-74. https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/476

Gómez, D. y Dartnell, P. (2019). Middle schoolers' biases and strategies in a fraction comparison task. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(6), 1233-1250. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9913-z

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., y Van Dooren, W. (2022). Profiles in understanding operations with rational numbers. *Mathematical Thinking and Learning, 24*(3), 230-247. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1882287

He, W., Yang, Y., y Gao, D. (2018). Proportional reasoning in 5- to 6-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 19*(4), 389–412. https://doi.org/10.1080/15248372.2018.1495218

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* Basic Books. https://doi.org/10.1037/10034-000

Karplus, R., Pulos, S., y Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate'problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233. https://doi.org/10.1007/BF00410539

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.21
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Kieren, T. E. (2020). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt, R. Putnam, y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323-371). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315044606

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: An introduction to its methodology*. SAGE.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (V. 1, pp. 629-667). Information Age.

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II Y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. MEP.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* MECD.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2015). *Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato.* MECD.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11* (2), 217-253. https://doi.org/10.1007/BF00304357

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at succesive stages: Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363. https://doi.org/10.1007/BF00697744

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: Un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,17(*1), 59-81. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1713

Otzen, T. y Manterola, C. (2017). Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. *Int. J. Morphol, 35*(1), 227-232. https://doi.org/10.4067/S0717-95022017000100037

Pérez-Echeverría, M. P., Carretero, M. y Pozo, J. I. (1986). Los adolescentes ante las matemáticas: Proporción y probabilidad. *Cuadernos de Pedagogía, 133*, 9-13.

Post, T., Behr, M. y Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. En A. Coxford, A. Shulte (Eds.), *The idea of algebra, K-12* (pp. 78-90), National Council of Teachers of Mathematics.

Tourniare, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204. https://doi.org/10.1007/PL00020739

Van Dooren, W., Vamvakoussi, X. y Verschaffel, L. (2018). *Proportional reasoning.* International Academy of Education (IAE).

Vanluydt, E., Verschaffel, L., y Van Dooren, W. (2022a). The early development of proportional reasoning: A longitudinal study of 5- to 8-year-olds. *Journal of Educational Psychology,* en prensa. https://doi.org/10.1037/edu0000734

Vanluydt, E., Verschaffel, L., y Van Dooren, W. (2022b). The role of relational preference in early proportional reasoning. *Learning and Individual Differences, 93,* 102108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2021.102108

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr