Uniciencia Vol. 38(1), pp. 1-17, January-December, 2024
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

Conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en formación inicial sobre el concepto de la demostración matemática

Specialized Knowledge of Prospective Mathematics Teachers on the Concept of Mathematical Proof

Conhecimento especializado dos professores de matemática em formação inicial sobre o conceito de demonstração matemática

Christian Alfaro-Carvajal[1]*, Jennifer Fonseca-Castro[1]

Received: Oct/6/2022 • Accepted: Dec/12/2022 • Published: Jan/1/2024

Resumen

[Objetivo] En este artículo, se presentan los resultados de una investigación cualitativa de carácter descriptivo que tiene como objetivo caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en formación inicial de la Universidad Nacional en Costa Rica (UNA), sobre el concepto de la demostración matemática, mediante el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). **[Metodología]** La investigación se posiciona en el paradigma interpretativo y tiene un enfoque cualitativo. Se aplicó un cuestionario, durante el primer semestre del 2021, a 42 profesores de matemáticas en formación inicial de cuarto y quinto año de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Para examinar la información, se empleó el análisis de contenido y se hicieron agrupaciones de las respuestas, con el propósito de generar ideas centrales sobre el concepto de demostración. **[Resultados]** De los resultados se desprenden cuatro ideas centrales sobre lo que es una demostración matemática para los sujetos de la investigación, cercanas a aspectos formales lógico-sintácticos y matemáticos (ALSM) o aspectos informales semánticos (AIS). Se encontraron evidencias de las cinco funciones de De Villiers (1993) para la demostración y surgieron nuevas funciones relacionadas con esta en las matemáticas y en las matemáticas escolares. **[Conclusiones]** Los resultados brindan insumos a formadores de profesores de matemáticas e investigadores, en la revisión y análisis de programas de formación docente, y contribuyen en la búsqueda de nuevas áreas de investigación relacionadas con el tema.

Palabras clave: conocimiento del profesor de matemáticas; demostración matemática; concepto de demostración; formación inicial de profesores de matemáticas.

* Autor para correspondencia
Christian Alfaro-Carvajal, cristian.alfaro.carvajal@una.ac.cr, http://orcid.org/0000-0003-2377-7181
Jennifer Fonseca-Castro, jennifer.fonseca.castro@una.ac.cr, http://orcid.org/0000-0002-3947-1673
1 Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

[Objective] This paper presents the results of a qualitative, descriptive research study characterizing the knowledge of prospective mathematics teachers at the National University of Costa Rica (UNA) concerning the concept of mathematical proof, using the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model. **[Methodology]** This research employed an interpretive paradigm and a qualitative approach. A questionnaire was administered to 42 mathematics teachers in initial training during the first semester of 2021, in the fourth and fifth years of the Bachelor's Degree program in Mathematics Teaching at the National University of Costa Rica. Content analysis was utilized to study the answers provided by participants. Groupings of answers were created to generate central ideas about the concept of proof. **[Results]** Based on the results, four central ideas were found about the nature of mathematical proof for the survey participants. These ideas are similar to the formal logical-syntactic and mathematical aspects (LSMA) or informal semantic aspects (ISA). Evidence for the five De Villiers (1993) functions of a proof was found. Moreover, new functions related to them were discovered in mathematics and in school mathematics. **[Conclusions]** The results provide input to trainers of mathematics teachers and researchers for the review and analysis of teacher training programs. Additionally, they contribute to the search for new research areas related to this subject.

Keywords: Mathematics teacher's knowledge; mathematical proof; concept of proof; prospective mathematics teachers.

Resumo

[**Objetivo**] Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa qualitativa descritiva que visa caracterizar o conhecimento especializado dos professores de matemática em formação inicial na Universidade Nacional da Costa Rica (UNA), sobre o conceito de prova matemática, utilizando o modelo de *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK). [**Metodologia**] A pesquisa está posicionada no paradigma interpretativo e tem uma abordagem qualitativa. Foi administrado um questionário durante o primeiro semestre de 2021 para 42 professores de matemática em formação inicial no quarto e quinto ano do Bacharelado e Bacharelado em Ensino de Matemática na Universidade Nacional da Costa Rica. Para examinar as informações, foi utilizada a análise de conteúdo e as respostas foram agrupadas a fim de gerar ideias centrais sobre o conceito de demonstração. [**Resultados**] A partir dos resultados, quatro ideias centrais sobre o que é uma prova matemática para os sujeitos da pesquisa, próximas aos aspectos formais lógico-sintáticos e matemáticos (ALSM) ou aspectos semânticos informais (AIS), podem ser deduzidas. Foram encontradas evidências para as cinco funções de De Villiers (1993) para a demonstração e surgiram novas funções relacionadas à demonstração em matemática e matemática escolar. **[Conclusões]** Os resultados fornecem contribuições para educadores e pesquisadores em matemática na revisão e análise de programas de formação docente, e contribuem para a busca de novas áreas de pesquisa relacionadas ao tema.

Palavras-chave: conhecimento do professor de matemática; demonstração matemática; conceito de demonstração; formação inicial do professor de matemática.

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

Introducción

La demostración matemática es una práctica matemática cuya forma de comprenderse y llevarse a cabo ha evolucionado históricamente. La idea contemporánea de lo que es una demostración matemática se ha visto influenciada fuertemente por la lógica-simbólica y los fundamentos de la matemática (Legris, 2012), así como por el contexto sociocultural en que se desarrolla (Alfaro *et al*., 2020).

En una investigación realizada por Selden y Selden (2017), sobre la comprensión de las demostraciones matemáticas, los autores diferenciaron cuatro conceptos relacionados con la actividad demostrativa: la comprensión, la construcción, la validación y la evaluación de las demostraciones. Mejía-Ramos *et al*. (2012) describen el entendimiento de las demostraciones de una forma pragmática, desde la comprensión local hasta una holística de la demostración matemática (Hernández-Suárez *et al*., 2020). Sin embargo, no existe consenso sobre una definición general de demostración que sea compartida por toda la comunidad matemática (Cabassut *et al*., 2012), lo que conlleva que no se tenga claro qué y cómo el estudiantado la comprende (Hernández-Suárez *et al*., 2020).

Un intento por precisar el concepto de demostración es buscar definirlo desde la lógica matemática y contrastarlo con lo que los matemáticos consideran que se ajusta a su quehacer en la práctica. De esta manera, se pueden tener dos conceptualizaciones principales sobre la demostración: una vinculada a la lógica y otra más cercana a la práctica de los matemáticos (Cabassut *et al*., 2012). Según Hanna y De Villiers (2012), la demostración matemática puede orientarse en dos diferentes posiciones, una, en la que lo fundamental es el establecimiento de una conclusión mediante una sucesión de pasos deductivos en los que privan los aspectos lógicos y sintácticos; otra, en la que se favorecen los componentes semánticos. En esta última postura, lo esencial son las ideas que permitan comprender la validez de los resultados matemáticos, dejando al rigor lógico en un plano de menor importancia.

En el ámbito internacional, existe consenso y un amplio reconocimiento sobre el papel de la demostración matemática a la hora de formar estudiantes en todos los niveles educativos, particularmente, en la formación de docentes de matemática (Cabassut *et al*., 2012; Mariotti, 2006; Stylianides, Stylianides y Weber, 2017).

Por otra parte, el estudio sobre el conocimiento del profesor ha sido un tema de interés desde hace tiempo (Ponte y Chapman, 2006), particularmente, se destacan, en la década de 1980, los trabajos de Elbaz (1983) y Shulman (1986). Posteriores a estos, han surgido diferentes modelos para conceptualizar el saber de los docentes, cada uno haciendo énfasis en distintos elementos y características. En dichos modelos, a partir del trabajo de Shulman (1986), se distinguen dos componentes principales: el conocimiento del contenido por enseñar y el conocimiento didáctico del contenido por enseñar.

Un modelo especialmente interesante es el planteado por Carrillo *et al*. (2018), *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)*, el cual considera la naturaleza especializada del conocimiento del profesor de matemáticas, tomando en cuenta lo que el docente utiliza y necesita, sin hacer referencias a otras profesiones. Este modelo plantea dos dominios fundamentales de conocimiento: *(1) el conocimiento matemático* que hace referencia a aquel que posee el profesor

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

sobre las matemáticas como una disciplina científica, pero en un contexto escolar, y *(2) el conocimiento didáctico del contenido* que se refiere a los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje. Establece, además, tres subdominios por considerar, como parte del conocimiento matemático: *(a) los conocimientos de los temas (KoT)*, *(b) los conocimientos de la estructura matemática (KSM)* y *(c) los conocimientos de la práctica matemática (KPM)*. El último remite a los saberes enlazados al cómo se procede y produce en matemática, es decir, las prácticas ligadas a la matemática; aquí la demostración matemática toma protagonismo.

En este sentido, el propósito de esta investigación es caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica, sobre el concepto de demostración matemática como parte del conocimiento de la práctica matemática (KPM) del modelo MTSK. Para esto, se consideraron, particularmente, dos elementos: (1) el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática y (2) el conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas y en las matemáticas escolares.

Marco teórico

Si bien es cierto el conocimiento del profesor de matemáticas sobre los temas es muy relevante, Flores-Medrano *et al*. (2016) señalan que, además de conocer los contenidos y sus relaciones (el conocimiento sustantivo), el docente de matemáticas debe saber cómo se produce el conocimiento matemático, lo que implica entender las reglas sintácticas de la disciplina; la diferencia entre una demostración, una prueba y una comprobación; así como los diferentes tipos de demostraciones (el conocimiento sintáctico). Esto permite, según los autores mencionados, que el profesor comprenda que un ejemplo en unos casos puede corresponder a una comprobación de una propiedad y, en otros, a una demostración.

El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (*MTSK*) considera el saber del profesor sobre el quehacer matemático como parte del conocimiento matemático y le ha asignado un subdominio en él, llamado *Knowledge of Practices in Mathematics* (*KPM*). Este subdominio hace referencia al conocimiento del profesor de matemáticas sobre la forma con la que se desarrollan las matemáticas, más allá de cualquier tema en particular. De esta manera, el saber que tiene el docente sobre lo que significa demostrar, justificar, definir, deducir e inducir es parte fundamental del KPM (Carrillo *et al*., 2018). Asimismo, el KPM incluye el conocimiento del fundamento lógico de cada una de las prácticas anteriores, igual que del uso y funcionamiento del ejemplo y contraejemplo. Dado que este subdominio refiere a los modos de desarrollar nuevos resultados matemáticos, es decir, a hacer matemáticas, sus categorías no son exhaustivas y pueden emerger nuevas.

Para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial sobre el concepto de demostración, empleamos la categorización propuesta por Alfaro *et al*. (2020) dentro del subdominio KPM. Dichos autores detectaron algunos elementos relevantes, que deben ser considerados en el conocimiento matemático sobre la demostración, y establecieron tres componentes expuestos a continuación.

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

1. *El conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática*: hace referencia al saber sobre lo que constituye una demostración matemática y considera los siguientes subcomponentes: *(a) el concepto de demostración matemática*, es decir, el conocimiento sobre qué es una demostración matemática y qué significa demostrar algo en las matemáticas, *(b) la validez lógica*, que quiere decir el conocimiento sobre cómo proceder en la demostración de afirmaciones matemáticas, involucrando de forma implícita o explícita las conectivas lógicas *(y, o, si-entonces, no, entre otras)* y los cuantificadores existencial y universal, además del uso de las reglas de inferencia, las equivalencias lógicas y los métodos de demostración y *(c) la validez matemática*, que remite al conocimiento del rigor en la demostración matemática, lo que supone el uso correcto de axiomas, hipótesis y definiciones empleadas en las demostraciones.
2. *El conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas:* es el conocimiento sobre cuál es el papel de las demostraciones en las matemáticas y en las matemáticas escolares.
3. *La convicción de un argumento matemático:* se refiere a las razones por las que los profesores de matemáticas encuentran convincente un argumento matemático. Se consideran los siguientes subcomponentes basados en el trabajo de Knuth (2002): el uso de elementos concretos, la familiaridad, el nivel de detalles, la forma ritual, el nivel explicativo y la validez del argumento.

En este trabajo, presentaremos los resultados obtenidos, correspondientes a los componentes *(1)(a)* y *(2)*, por su estrecha relación con el objetivo de esta investigación. No se incluyen los subcomponentes ligados a la validez lógica o matemática de la demostración, puesto que estos, por sí mismos, podrían asumir una postura sobre lo qué significa demostrar en matemática, incluyendo aspectos lógicos y sintácticos.

En relación con el primer componente (el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración), específicamente sobre el concepto de demostración, consideramos las dos conceptualizaciones propuestas por Hanna y De Villiers (2012). La primera está vinculada a la lógica en la que una demostración matemática formal es una sucesión de proposiciones, donde la última es el teorema demostrado y cada una de las anteriores es un axioma o es el resultado de aplicar una regla de inferencia a proposiciones previas de la sucesión. De esta manera, las reglas de inferencia son evidentes y la validez de la demostración puede verificarse de forma mecánica (Cabassut *et al*., 2012; Hanna y De Villiers, 2012; Tall *et al*., 2012). A esta le llamamos, para propósitos de análisis de la información, conceptualizaciones cercanas a *aspectos formales lógico-sintácticos y matemáticos (ALSM)*. La segunda conceptualización está vinculada a la práctica de los matemáticos, donde se consideran los componentes informales y semánticos de la demostración. En esta segunda postura, la demostración tiene un propósito más amplio que el simple establecimiento de la verdad, puede contribuir a obtener nuevos conocimientos matemáticos, establecer enlaces contextuales novedosos y favorecer la aparición de más métodos para resolver problemas (Cabassut *et al*., 2012; Hanna y De Villiers, 2012). De tal manera, una demostración matemática es un argumento para convencer a un grupo de expertos sobre la veracidad de una afirmación matemática y

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

si es posible explicar dicha veracidad. Este tipo de demostraciones se puede observar en revistas de investigación matemática, libros de texto escolares y universitarios; generalmente, presenta puentes conceptuales en algunas partes del argumento, en lugar de una justificación lógica explícita. A esta le denominamos conceptualizaciones cercanas a *aspectos informales semánticos (AIS).*

En relación con el segundo componente, el conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas, se consideraron, para esta investigación, las categorías propuestas por De Villiers (1993): *(a) la verificación*, la demostración es una forma de justificar la validez de los resultados matemáticos y garantizar su veracidad; *(b) la explicación*, la demostración permite profundizar y comprender por qué una proposición matemática es verdadera; *(c) la sistematización*, la demostración posibilita organizar de manera lógica un conjunto de enunciados verdaderos, proporcionando una perspectiva global que favorece la simplificación, la detección de errores, la aplicación en distintas áreas, entre otros elementos; *(d) el descubrimiento*, la demostración conduce al descubrimiento de nuevos resultados matemáticos de forma deductiva; *(e) la comunicación*, la demostración deja comunicar resultados matemáticos entre distintos actores de la comunidad científica, haciendo énfasis en el proceso social de informar y difundir el conocimiento matemático, lo que permite su crecimiento y refinamiento, la detección de errores, entre otros.

Metodología

La investigación tiene un enfoque cualitativo de alcance descriptivo. Participaron 42 profesores de matemáticas en formación inicial de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la UNA. 28 de los participantes estaban matriculados en el cuarto año de la carrera y 14 en el quinto año, durante el primer semestre del 2021. Dicha carrera se imparte de manera compartida por la Escuela de Matemática, que ofrece el componente matemático, y la División de Educología, que brinda el componente pedagógico. Otorga el grado académico de bachillerato, con una duración de cuatro años, y el de licenciatura, que consta de tres semestres adicionales y la elaboración de un trabajo final de graduación.

Todos los sujetos participantes en la investigación, como parte de su plan de estudios, han aprobado cursos de lógica matemática y han tanto visto como realizado demostraciones en la mayoría de las asignaturas de matemática que han llevado.

Recolección de la información

Se aplicó un cuestionario durante los meses de abril y mayo del 2021, con una duración aproximada de dos horas. Dado que las clases eran mediante presencialidad remota, debido a la pandemia por el COVID-19, se envió el cuestionario al correo electrónico de los sujetos de investigación, los cuales lo completaron de forma individual, en los horarios de los cursos matriculados, bajo la supervisión del respectivo docente.

El cuestionario consta de cuatro preguntas de respuesta abierta, dirigidas a caracterizar el conocimiento de los participantes sobre el concepto de demostración matemática. Las preguntas 1 y 2 están orientadas a definir "demostración" y las 3 y 4, a sus funciones en las matemáticas y en las matemáticas escolares: (1) ¿qué es para usted una demostración matemática?; (2) ¿qué significa para usted demostrar en matemáticas?; (3) ¿para qué sirve

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

una demostración en matemáticas?, y, (4) ¿considera usted que la demostración tiene alguna función en la enseñanza de las matemáticas escolares? En caso afirmativo, explique qué funciones tiene. En caso negativo, explique por qué razón.

Para cada pregunta, los encuestados debían brindar una respuesta lo más amplia y explicativa posible, apoyando con un ejemplo que ilustrara su explicación. El objetivo del ejemplo que se les pidió era tener más elementos para comprender sus respuestas y planteamientos. El cuestionario se compartió con expertos nacionales e internacionales en didáctica de la matemática, matemática pura y enseñanza de la matemática a quienes se les explicó el propósito de cada una de las preguntas y las categorías diseñadas para su posterior examen. Ellos brindaron sugerencias que enriquecieron los instrumentos y depuraron las categorías de análisis. Posteriormente, todo se validó, en una prueba piloto con profesores de matemáticas en formación inicial distintos a los sujetos de investigación considerados en este estudio. Dicha experiencia permitió la revisión y el refinamiento de las categorías de análisis.

Análisis de la información

La información recopilada se examinó mediante el análisis de contenido, el cual permite la codificación de preguntas abiertas en cuestionarios y la descripción de patrones y tendencias en el contenido comunicativo (Cohen *et al*., 2007). Este análisis, según Cohen *et al*. (2007), implica codificación, categorización (creación de categorías significativas en las que se pueden ubicar las unidades de análisis-palabras, frases, oraciones), comparación (categorías y creación de vínculos entre ellas) y extracción de conclusiones teóricas de las unidades de análisis.

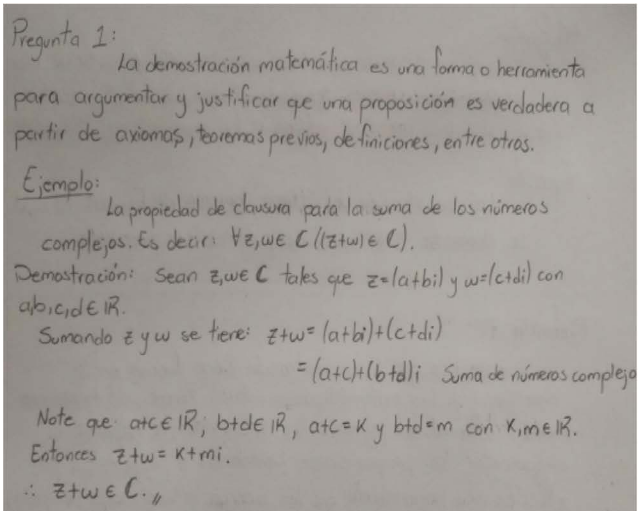
Con el fin de analizar la información, se procedió al estudio de cada respuesta suministrada por los sujetos de investigación, en sesiones conjuntas de trabajo entre los dos investigadores. Para las preguntas 1 y 2, se utilizaron las conceptualizaciones propuestas por Hanna y y De Villiers (2012), que resumimos en dos categorías: *(a) aspectos formales lógico-sintácticos y matemáticos (ALSM)* y *(b) aspectos informales semánticos (AIS)*. En la categoría *ALSM*, se consideraron las respuestas de los participantes que incluyeran en su descripción aspectos alusivos a estructuras secuenciales, pasos deductivos, elementos de la teoría matemática (tales como axiomas, definiciones, teoremas, hipótesis, cuantificadores universales o existenciales, conectores lógicos, uso de reglas de inferencia, equivalencias lógicas, entre otros). Por otra parte, en la categoría *AIS*, se incluyeron las respuestas que apuntaban más a aspectos generales y pocos formales asociados a la argumentación general para el convencimiento; por ejemplo, si contemplaban el uso de un dibujo o manipulativos, con el afán de demostrar o justificar un resultado. Es importante aclarar que no necesariamente una categoría es excluyente de la otra. Fue posible observar respuestas que incluían aspectos de ambas categorías a la vez; en tales casos, las contestaciones se contabilizaban en las dos categorías.

A continuación, se ilustra, con dos casos particulares, el análisis realizado para las respuestas de los sujetos a la pregunta 1 de este cuestionario. En la figura 1, se presentan las repuestas de los sujetos EBM04 y ELM01, respectivamente, sobre la definición de demostración matemática.

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr


Pregunta 1:
La demostración matemática es una forma o herramienta para argumentar y justificar que una proposición es verdadera a partir de axiomas, teoremas previos, definiciones, entre otros.
Ejemplo:
La propiedad de clausura para la suma de los números complejos. Es decir: $\forall z,w \in \mathbb{C}\ ((z+w) \in \mathbb{C})$.
Demostración: Sean $z,w \in \mathbb{C}$ tales que $z=(a+bi)$ y $w=(c+di)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
Sumando z y w se tiene: $z+w=(a+bi)+(c+di)$
$=(a+c)+(b+d)i$ Suma de números complejo
Note que $a+c \in \mathbb{R}$; $b+d \in \mathbb{R}$, $a+c=k$ y $b+d=m$ con $k,m \in \mathbb{R}$.
Entonces $z+w=k+mi$.
$\therefore z+w \in \mathbb{C}$.

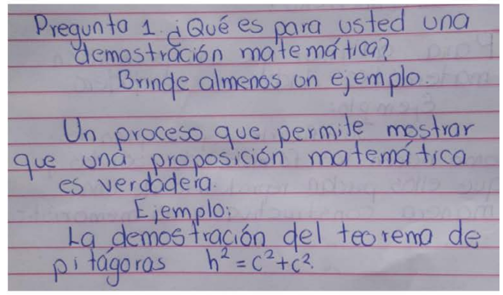

Pregunta 1 ¿Qué es para usted una demostración matemática? Brinde almenos un ejemplo.
Un proceso que permite mostrar que una proposición matemática es verdadera.
Ejemplo:
La demostración del teorema de pitágoras $h^2=c^2+c^2$

Figura 1. *Respuestas de los sujetos EBM04* (izquierda) *y ELM01* (derecha) *a la pregunta 1 del cuestionario*

La imagen de la izquierda corresponde a la respuesta del sujeto EBM04, la cual se ubica en la categoría *ALSM*, pues hace alusión al uso de aspectos formales matemáticos tales como axiomas, definiciones, teoremas, entre otros. La imagen de la derecha muestra la respuesta del sujeto ELM01 y se ubica en la categoría *AIS*, pues no hace explícito ningún elemento formal lógico-sintáctico-matemático, en su lugar, hace referencia a procesos para mostrar que una proposición es verdadera, de una forma muy general, sin hacer evidentes aspectos formales o sintácticos para tal objetivo.

En el caso de las preguntas 3 y 4, para determinar las funciones que los sujetos de investigación atribuyen a la demostración en las matemáticas y en las matemáticas escolares, se utilizaron, como punto de partida, las funciones planteadas por De Villiers (1993) descritas en el marco teórico. Las respuestas se analizaron y se colocaron en alguna de estas categorías. Algunas contestaciones solo referían a una categoría, mientras que otras hacían alusión a varias categorías a la vez. Para las respuestas que no se pudieron ubicar en las categorías ya existentes, se crearon nuevas, especificadas en los resultados.

Resultados

Los resultados se organizaron con base en los dos elementos considerados en esta investigación, para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemática en formación inicial sobre el concepto de la demostración matemática: (1) el concepto de demostración que hace referencia al conocimiento sobre qué es una demostración matemática y qué significa demostrar una proposición en las matemáticas; (2) las funciones de la demostración que remiten al conocimiento sobre cuál es el papel de las demostraciones en las matemáticas y en las matemáticas escolares.

El concepto de demostración

En relación con el conocimiento sobre *el concepto de demostración matemática*, los sujetos de investigación ofrecieron, en la pregunta 1 del cuestionario,

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

una definición de demostración matemática, basada en sus conocimientos y experiencias. La mayoría de los sujetos de la investigación proporcionó una definición de demostración matemática cercana a la categoría denominada *aspectos formales lógico-sintácticos y matemáticos (ALSM)*. A continuación, se detallan tres ejemplos de respuestas en esta categoría, correspondientes a los sujetos EBH17, EBM13 y ELH05, respectivamente:

- Es la prueba de que una conjetura o propiedad matemática se cumple o es verdadera, partiendo de definiciones o axiomas que funcionan como hipótesis a dicha demostración (EBH17).
- Es poder aplicar criterios de congruencia, definiciones, axiomas y teoremas para dar resultados verdaderos (EBM13).
- Una argumentación axiomática, secuenciada y fundamentada en la teoría, para comprobar la validez de una proposición (ELH05).

En esta categoría, fueron notorias dos ideas centrales en las respuestas de los sujetos sobre qué es una demostración matemática.

Idea central 1 (ALSM): *la demostración matemática como un sustantivo*

Asocian demostración matemática con sustantivos calificativos tales como una construcción, una herramienta, un proceso, una prueba, un razonamiento matemático, un argumento matemático deductivo, un método lógico y axiomático, para determinar la validez de una proposición, haciendo uso de definiciones, teoremas, axiomas, entre otros.

Idea central 2 (ALSM): *la demostración matemática como una acción*

Consideran que la demostración matemática es usar o aplicar definiciones, teoremas, axiomas, etc., para determinar la validez de una proposición.

Ambas ideas centrales incluyen en su descripción aspectos relacionados con la categoría *ALSM*. No obstante, las repuestas incluidas en la *idea central 1* hacen principal alusión a los aspectos enlazados a la lógica matemática; mientras que las contestaciones de la *idea central 2* resaltan los elementos sintácticos, sin mencionar específicamente la parte lógica matemática.

Por otro lado, una minoría de los profesores de matemáticas en formación inicial definió demostración matemática de modo más cercano a la categoría denominada *aspectos informales semánticos (AIS)*. Estas definiciones aluden al uso de manipulativos o aplicaciones que permitan evidenciar o convencer al espectador de los resultados del teorema; no obstante, no evidencian aspectos lógico-sintácticos, ni matemáticos. A continuación, se muestran las respuestas de los sujetos EBH12 y ELH06 que ilustran dicha categoría:

- Es un argumento matemático convincente que sirve para convencer de que cierta idea matemática es verdadera, o en otras palabras, siempre se cumple bajo las condiciones que esta involucra (EBH12).
- Son una serie de pasos matemáticos, fundamentales, que ayudan a explicar un resultado matemático en concreto (ELH06).

De las contestaciones en esta categoría, se extrae una idea central que sintetiza qué es una demostración matemática para

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

los profesores de matemáticas en formación inicial. Para estos sujetos, una demostración matemática es…

Idea central 3 (AIS): una prueba, una justificación, un argumento convincente, un método, un proceso, una explicación, una serie de pasos para garantizar o convencer sobre la veracidad de una proposición.

A diferencia de las *ideas centrales 1 y 2*, estas respuestas no aluden la descripción o, en los ejemplos proporcionados, a elementos de lógica-matemática, deductivos o sintáctico-matemáticos.

Solamente la definición aportada por el sujeto EBH09 incluía en su descripción elementos de ambas categorías *ALSM* y *AIS*, lo que podría considerarse una idea central junto con las tres que se mencionaron.

Idea central 4 (ALMS y AIS): una demostración matemática es una prueba o justificación mediante el uso de axiomas o proposiciones verdaderas para justificar el argumento que se desea demostrar. Puede apoyarse con materiales concreto o visual (EBH09).

En relación con el conocimiento sobre *qué significa demostrar* una proposición en las matemáticas, las respuestas de los sujetos de investigación a la pregunta 2 del cuestionario se agruparon utilizando las mismas categorías empleadas para el análisis de la pregunta 1. En contraste con la pregunta 1, solo una contestación se ubicó en la categoría *aspectos formales lógico-sintácticos matemáticos (ALSM)*:

- Demostrar en matemática significa argumentar con rigor, empleando teoremas y axiomas para construir y justificar el argumento. También significa utilizar el razonamiento para determinar los procesos y recursos a emplear de manera adecuada (EBM06).

Dicha respuesta involucra aspectos formales lógico-sintácticos-matemáticos, hace referencia al rigor y a la necesidad de saber emplear razonadamente los recursos para formular una demostración. No obstante, no menciona procesos lógicos o deductivos.

El resto de las contestaciones se ubicó en la categoría *aspectos informales semánticos (AIS)*. Estas se agruparon en tres ideas centrales:

Demostrar en matemáticas es una acción relacionada únicamente con su funcionalidad: en este caso, demostrar refiere a acciones tales como justificar, verificar, validar, argumentar, evidenciar o fundamentar la validez de una proposición. No obstante, existe una ausencia de la forma en la que se llevan a cabo esas acciones. A continuación, se muestran las respuestas de los sujetos EBH10 y ELH11 que ilustran esta idea:

- Hacer válido un argumento, una propiedad de algún algoritmo, validar una fórmula (EBH10).
- Demostrar en matemáticas para mí significa verificar si un argumento matemático es confiable, con el fin de facilitar otros procedimientos matemáticos (ELH11).

Demostrar en matemáticas es una acción relacionada con su funcionalidad e incluye el uso de alguna herramienta en el proceso: significa argumentar o validar una proposición empleando herramientas. Sin embargo, en las respuestas no se precisa cuáles herramientas o cómo usarlas. Se hace alusión a aspectos más intuitivos.

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Seguidamente, se presenta como ejemplo la respuesta del sujeto EBH08:

- Significa poder utilizar diversas herramientas de la disciplina para garantizar la veracidad de diversos teoremas (EBH08).

Demostrar en matemáticas es una habilidad: se remite a una habilidad que muestra comprensión de las matemáticas, por parte de quien demuestra y promueve la criticidad y la abstracción para desarrollar el pensamiento complejo. Al igual que en las anteriores, no se conduce a procesos deductivos o lógico-sintáctico-matemáticos. El siguiente ejemplo del sujeto ELM12 ilustra este tipo de respuesta:

- Es una habilidad, debido a que uno tiene que comprender el significado del teorema para luego implementar las herramientas que uno tiene (definiciones, lemas, etc.) para luego construir a partir de las hipótesis, poder llegar al resultado (ELM12).

En general, para la pregunta 2, las contestaciones de los sujetos de investigación van orientadas a explicar el significado de demostrar en matemáticas en términos de su función. Pocas respuestas incluyeron explicaciones o descripciones explícitas de cómo se procede al realizar una demostración matemática. Entiéndase que se describe lo que se observó en el análisis de los resultados, esto no significa que una o la otra sea correcta o incorrecta.

Las funciones de la demostración en las matemáticas y en las matemáticas escolares

En relación con el conocimiento sobre *cuál es el papel de las demostraciones en las matemáticas*, planteado en la pregunta 3 del cuestionario, se encontraron evidencias de las funciones descritas por De Villiers (1993). La que más mencionaron los sujetos fue la verificación, seguida por la explicación, la sistematización, el descubrimiento y, por último, la comunicación.

En el caso de la verificación, los participantes señalan que la demostración en las matemáticas sirve para certificar, validar, garantizar, argumentar y observar la validez de una proposición y su importancia en otras áreas. Asimismo, indican que sirve para dar sentido y congruencia a las matemáticas y obtener, bajo condiciones similares, los mismos resultados. Una respuesta representativa es la del sujeto EBH12.

- Sirve para dar validez, sentido y congruencia en la construcción y aplicación de las matemáticas, de modo que, en cualquier parte del mundo y en cualquier contexto donde se utilicen las matemáticas, estas tengan la misma forma y se llegue a los mismos resultados (EBH12).

Sobre la función explicativa, los sujetos consideran que la demostración funciona para determinar las razones por las que una proposición es verdadera y explicar mejor el conocimiento matemático, además de justificar el uso de un resultado en un contexto determinado. En esta función, los profesores proponen un elemento adicional que consiste en que la demostración posibilita debatir y cuestionar una proposición, con el objetivo de garantizar su validez. Dos

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

respuestas que ilustran lo previo son las de EBM02 y ELM12.

- Sirve para justificar al estudiante las razones que le permiten emplear un determinado resultado en la resolución de un ejercicio (EBM02).
- Sirve para adquirir un mayor aprendizaje y así ser capaz de justificar por qué es necesario implementar esa definición. En ocasiones las demostraciones pueden ser confusas pero necesarias (ELM12).

Respecto a la función de sistematización, los docentes en estudio apuntan que ordena, formaliza y generaliza resultados, así como determina errores en una teoría matemática. Esta da fundamento a las matemáticas como una teoría organizada. Una respuesta representativa es la de EBH05.

- En mi opinión, sirve para tener orden y formalidad, además si no se demuestra en matemáticas cualquier teoría o proposición se utilizarían si saber que se cumple no sólo para casos particulares, es decir, a partir de la demostración se puede generalizar (EBH05).

En cuanto a la función de descubrimiento, determinamos que para los participantes la demostración en las matemáticas permite construir y revisar el conocimiento, mediante la creación de nuevos teoremas y la validación o descarte de ideas, lo que conlleva ampliar el aporte de las teorías matemáticas existentes en otras áreas del saber. El descubrimiento se emplea para comprender una situación concreta que deja, posteriormente, obtener nuevos resultados o saberes. Una respuesta de esta función es la de EBH09.

- Una demostración sirve para conocer más el mundo que nos rodea e incluso para conocer nuevos resultados o saberes (EBH09).

La función de comunicación fue evidenciada por EBM07 y EBM13, tal como se muestra acá:

- Sirve para mostrar, de una manera que cualquiera que conozca el lenguaje matemático sea capaz de entender la demostración. De esta manera, no importa si una persona habla inglés, español o cualquier otro idioma (EBM07).
- Considero que sirven para mostrar verdades, debatir y cuestionarse. Lo veo cuando estoy intentando resolver un ejercicio que tengo que exponer, siempre intento que sea como vender un producto, intento que el que lea mi demostración me la compre, que le dé confianza hacer tal compra. Así veo la utilidad de una demostración, vendo conocimiento útil (EBM13).

Aunada a las cinco funciones antes mencionadas de las respuestas de los sujetos de investigación, surgió otra emergente relacionada con el desarrollo de habilidades; así lo manifestó, por ejemplo, ELM02:

- Las demostraciones matemáticas sirven para desarrollar habilidades tales como el pensamiento crítico y deductivo, la argumentación, entre otras que permite justificar con lógica los procedimientos matemáticos (ELM02).

En relación con el conocimiento sobre *cuál es el papel de las demostraciones en las matemáticas escolares*, en la pregunta 4 del cuestionario, una minoría de los participantes

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

respondió que la demostración matemática no tiene ninguna función en las matemáticas escolares. Afirman que el docente de matemáticas debe saber demostrar, pero, según su experiencia, cuando enseñan las matemáticas escolares no han hecho uso de la demostración. Seguidamente, se presentan dos respuestas que evidencian el resultado.

- Si lo enfocamos en la enseñanza escolar es importante que el docente sepa demostrar, sin embargo, en el momento que se va a impartir un tema en las aulas no va a ser por medio de demostraciones (EBM01).
- Tal vez para ustedes que forman futuros profesores sí funciona de alguna manera le enseñan a uno, pero uno que va para un colegio para que lo necesita, llevo años brindando tutorías o clases particulares y en ningún momento lo he ocupado (EBH10).

La mayoría de los participantes atribuye una o más de una función a la demostración en la enseñanza de las matemáticas escolares. De las funciones de la demostración en las matemáticas planteadas por De Villiers (1993), se encontraron evidencias, en este trabajo, solamente de tres: la verificación, la explicación y el descubrimiento. Adicionalmente, se han determinado tres funciones emergentes asociadas a las de la demostración en las matemáticas escolares: el desarrollo de habilidades en los alumnos, la contribución al dominio afectivo en los alumnos y la contribución a la práctica docente.

En el caso de las funciones de verificación y descubrimiento, los participantes encuentran la demostración matemática útil en las matemáticas escolares para la validación de resultados y facilitar la construcción de nuevo conocimiento, lo que favorece que los estudiantes comprendan que las matemáticas son formales. Lo anterior, sumado al propósito de la función explicativa, la cual procura dar sentido al saber matemático escolar, que el estudiantado entienda por qué una proposición matemática es verdadera, conozca su origen, utilidad y fundamentos, igual que profundice la compresión de los temas.

A continuación, se presenta la respuesta de ELM04, como evidencia de la verificación, y la de ELM12, quien alude al descubrimiento y la explicación.

- Les permite a los estudiantes hacer una comprobación de lo planteado en cuanto a los conceptos o fórmulas matemáticas (ELM04).
- Sirve para construir el conocimiento y así poder aprender el cómo y el porqué se cumplen ciertas características o teoremas (ELM12).

En cuanto a la función asociada al desarrollo de habilidades en los alumnos, los sujetos mencionan que esta fomenta o desarrolla la argumentación; el razonamiento y pensamiento matemático; el pensamiento crítico, lógico y deductivo; la formulación y validación de conjeturas, y la resolución de problemas. De seguido, las respuestas de EBM07 y EBM18, quienes hacen referencia a dicha función:

- Para inculcar en los estudiantes el razonamiento y el pensamiento matemático (EBM07).
- Desde edades muy tempranas sería bueno enseñar a los niños a pensar de una manera no mecánica, sino más bien, se debe tratar de enseñarles desde el pensamiento crítico, lógico y deductivo, proceso de pensamiento el cual considero que una demostración logra desarrollar (EBH18).

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

Para la función asociada a la contribución al dominio afectivo en los alumnos, se remite a aspectos relacionados con la identidad matemática de los estudiantes; a la motivación, el amor e interés por las matemáticas; la curiosidad; la confianza en sí mismos, y la familiaridad con las matemáticas. Se presentan las respuestas de EBM03 y ELM01 que evidenciaron la función:

- Motivar a conocer nuevas proposiciones (EBM03).
- Permite despertar la curiosidad en los estudiantes, además, permite que ellos confíen de los contenidos que se están abarcando en la clase y no porque lo dice el profesor, sino porque hay una validez matemática (ELM01).

La función asociada con contribuir a la práctica docente consiste en que la demostración sirve para que el profesor de matemáticas conozca los fundamentos del contenido matemático escolar y justifique la validez de una proposición, si esta es cuestionada por sus alumnos. Además, le brinda al docente procedimientos o argumentos para la enseñanza del conocimiento matemático. Una respuesta que ilustra lo mencionado es la de ELM03.

- Como docente, saber de dónde provienen los diferentes tópicos que debe enseñar, es decir, tener un conocimiento especializado. Sin embargo, utilizarlos para explicar los temas puede resultar algo abstracto para los estudiantes. Se utilizaría si un estudiante quiere saber que lo que uno explica no fue inventado, sino que sí es cierto (ELM03).

Conclusiones

El objetivo de este estudio es caracterizar el conocimiento especializado de profesores de matemáticas, en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica, sobre el concepto de demostración como parte del *KMP* del modelo *MTSK*.

Los resultados de este trabajo permiten dilucidar una caracterización de los saberes de los docentes en formación inicial de la UNA sobre el concepto de demostración matemática, en la cual los aspectos lógico-sintácticos cobran relevancia, sin dejar de lado los informales y semánticos.

En relación con la pregunta sobre *qué es una demostración matemática*, los profesores en formación inicial proporcionaron una definición que incluye *aspectos formales lógico-sintácticos y matemáticos (ALSM)* en su descripción. Ella refiere a procesos deductivos o secuenciales, en los que se utilizan teoremas, axiomas, definiciones, entre otros. Se observaron dos tendencias de respuestas sintetizadas como ideas centrales y que pretenden recoger el sentir de los sujetos: la demostración matemática definida como un sustantivo y la demostración matemática definida como una acción.

Los docentes que brindaron una definición cercana a *aspectos informales semánticos (AIS)* señalaron el uso de manipulativos, dibujos, explicaciones o aplicaciones para evidenciar o convencer al espectador de los resultados, sin hacer referencia a los aspectos lógico-sintácticos o matemáticos.

Encontramos definiciones de demostración matemática que incluían elementos de ambas categorías *ALSM* y *AIS*, las cuales hacían referencia tanto a aspectos lógico-sintácticos y matemáticos como a los semánticos.

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

En relación con *qué significa demostrar* una proposición en las matemáticas, los resultados se invierten. Los profesores en formación inicial asocian demostrar con *aspectos informales semánticos (AIS)*. Para ellos, demostrar en matemática es (a) una acción relacionada únicamente con su funcionalidad, es decir, significa justificar, verificar, validar, argumentar, evidenciar o fundamentar la validez de una proposición; (b) una acción ligada con su funcionalidad e incluye en el proceso el uso de alguna herramienta de la disciplina, como definiciones, axiomas, teoremas, símbolos, lenguaje, entre otros; y (c) una habilidad.

Sobre *las funciones de la demostración en las matemáticas*, las cinco de De Villiers (1993) fueron mencionadas por los participantes, con mayor inclinación por las de verificación y explicación. De las funciones mencionadas por los docentes de matemáticas, se desprende una nueva función, la demostración para el desarrollo de habilidades; esta es la más atribuida a la demostración en las matemáticas escolares, seguida de la explicación. Los sujetos de investigación afirman que la demostración en las matemáticas escolares sirve para fomentar en el alumno habilidades tales como la argumentación; el razonamiento y pensamiento matemático; el pensamiento crítico, lógico y deductivo; la formulación de conjeturas; la resolución de problemas; la motivación, el amor e interés por las matemáticas; la curiosidad, la confianza y familiaridad con las matemáticas. Además, estas permiten dar sentido al conocimiento matemático escolar. De las funciones planteadas por De Villiers (1993) para la demostración en las matemáticas escolares, se encontraron evidencias solamente de tres: la verificación, la explicación y el descubrimiento.

Es importante aclarar que en esta indagación no se consideran respuestas correctas o incorrectas, ni se generalizan los resultados. Lo que se pretende es caracterizar el conocimiento sobre la demostración, concretamente, saber qué es, qué significa y para qué sirve la demostración según el profesor de matemáticas en formación inicial, complementando, así, el trabajo realizado por Alfaro *et al*. (2020), en el que el foco investigativo fue el conocimiento de profesores en formación inicial sobre la validez lógica (ver componente 1b del marco teórico) y cómo se procede en la demostración de afirmaciones matemáticas. Para dicho estudio, las categorías de análisis eran precisas y claramente definidas *a priori*, pues los conocimientos por caracterizar eran más explícitos y estaban fundamentados en el saber matemático.

Nuestros hallazgos, por su parte, se nutren de la categorización propuesta por Alfaro *et al*. (2020) y aportan a otras categorías del modelo no exploradas por dichos autores, relacionadas con el concepto mismo de demostración, lo que significa demostrar y sus funciones.

En esta investigación, al no asumirse una postura *a priori* sobre el concepto de demostración, las categorías de análisis son emergentes, a diferencia de las pesquisas de Alfaro *et al*. (2020), en las que esas categorías fueron claramente identificadas y fundamentadas desde la lógica-matemática.

Asimismo, este trabajo podría brindar insumos a formadores de docentes de matemáticas e investigadores, en la revisión y el análisis de programas de formación docente inicial y continua en enseñanza de las matemáticas, igual que coadyuva en la búsqueda de nuevas áreas investigativas vinculadas con la demostración matemática. Indagar sobre qué es, qué significa y cuál es la función de la demostración para los futuros

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470

profesores permite dilucidar qué apreciaciones se están generando en ellos y, con esto, tomar decisiones curriculares y metodológicas en respuesta a los resultados.

Se hace evidente la necesidad de que, en los programas matemáticos de formación docente, se discuta y reflexione sobre la demostración y sus funciones, como un posible objeto de estudio y no solo como una herramienta en los cursos de matemática.

Financiamiento

Universidad Nacional, Costa Rica.

Reconocimientos

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación inscrito en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, con el código 0011-20 y denominado “El conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en formación inicial en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la demostración”. Asimismo, forma parte de las actividades de la Red Iberoamericana de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (RED MTSK), adscrita a la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Consentimiento informado

Los autores declaramos que los participantes de este estudio fueron informados sobre el tratamiento de la información.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

Declaración de la contribución de los autores

El porcentaje total de contribución para conceptualizar, preparar y corregir este artículo fue el siguiente: C. A. C. 50 % y J. F. C. 50 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [**C. A. C.**], previa solicitud razonable.

Referencias

Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA*, *14*(2), 85-117. https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9363

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. y Morselli, F. (2012). Conceptions of proof - In research and teaching [Concepciones de la demostración - En la investigación y la docencia]. En G. Hanna y M. De Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher’s specialized knowledge (MTSK) model [El modelo de conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK)]. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. Doi: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education [Métodos de Investigación en Educación]*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203029053

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, 15-30.

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.5
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Elbaz, F. (1983). *Teacher Thinking. A Study of Practical Knowledge [Pensamiento del maestro: Un estudio del conocimiento de la práctica]*. Routledge.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M. y Liñán, M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 204-221. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Hanna, G. y De Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education [Aspectos de la demostración en la educación matemática]. En G. Hanna y M. De Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_1

Hernández-Suárez, C. A., Prada-Núñez, R., Parada-Carrillo, D. A. y Pumarejo-García, L. D. (2020). La comprensión de las demostraciones matemáticas. Un estudio de revisión. *Eco Matemático*, *11*(2), 100-110. https://doi.org/10.22463/17948231.3201

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof [Concepciones de demostración de profesores de matemática de secundaria]. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405. Doi: https://doi.org/10.2307/4149959

Legris, J. (2012). Nota sobre el concepto de demostración en CS Peirce. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, *1*(2), 124-134.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education [Demostración y demostrar en la educación matemática]. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics* education (pp. 173-204). Sense Publisher. https://doi.org/10.1163/9789087901127_008

Mejía-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. y Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics [Un modelo de evaluación para la comprensión de demostraciones en matemáticas de pregrado]. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3-18. Doi: https://doi.org/10.1007/s10649-011-9349-7

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices [Conocimientos y práctica de los profesores de matemáticas]. En A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publisher. Doi: https://doi.org/10.1163/9789087901127_017

Selden, A. y Selden, J. (2017). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation [Una comparación de comprensión de demostración, construcción de demostración, validación de demostración y evaluación de demostración]. En R. Gölle, R. Biehler, R. Hochmuth y H. Rück (eds.), *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline* (pp. 339-345). Universitätsbibliothek Kassel.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching [Los que entienden: El conocimiento crece en la enseñanza]. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. Doi: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward [Investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración: Hacer un balance y avanzar]. En J. Cai (ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M. y Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof [Desarrollo cognitivo de la demostración]. En G. Hanna y M. De Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2

UNICIENCIA Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2024 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr